X

К р и т е р и и п л а с т и ч н о с т и и р а з р у ш е н и я.

Материал подавляющего большинства машин, механизмов и приборов, созданных человеком, работает в пределах упругости, ибо появление в нём необратимых (пластических) деформаций или трещин приводит к поломке машины.

Предельным называют состояние напряжённого материала, непосредственно предшествующее появлению в нём пластических деформаций (у пластических материалов) или трещин (у хрупких материалов).

Число *n* называется ***коэффициентом запаса прочности*** в точке тела, если пропорциональное увеличение в *n* раз всех компонент напряжённого состояния в этой точке приводит к возникновению предельного состояния в её окрестности:

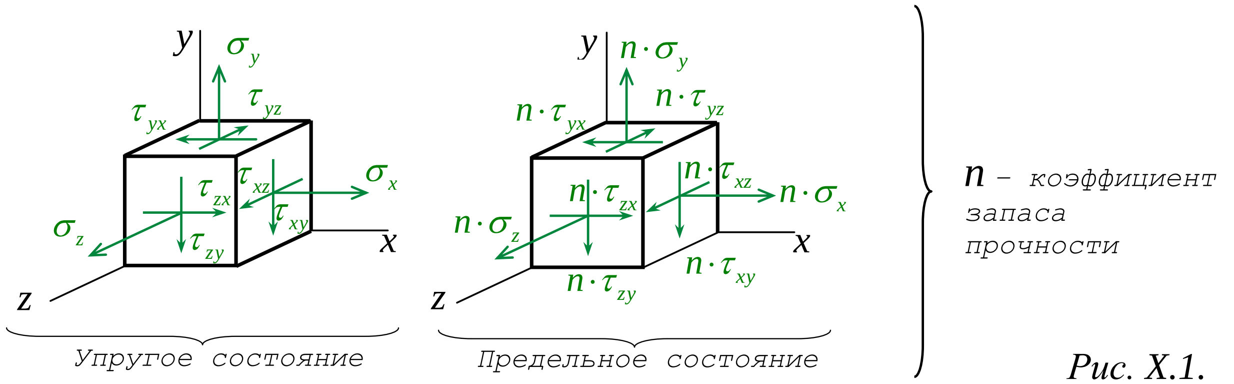


Рис. X.1.

Два напряжённых состояния называются ***эквивалентными*** в смысле прочности (***равноопасными***), если их коэффициенты запаса равны между собой:

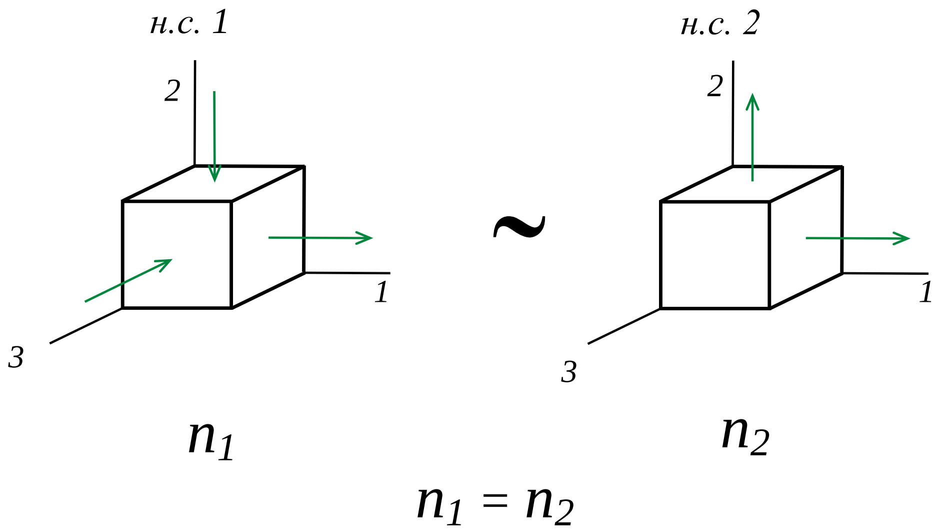


Рис. X.2.

Напряжение одноосного *растяжения*, создающее напряжённое состояние, равноопасное заданному, называется ***эквивалентным напряжением*** $\boldsymbol{\sigma_{экв}}$:

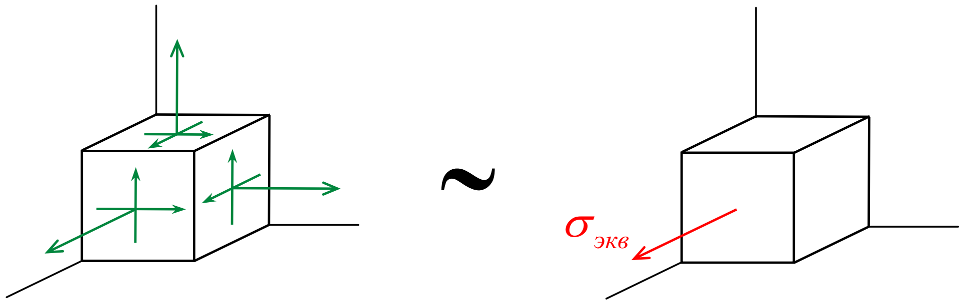


Рис. Х.3.

При известном эквивалентном напряжении $\sigma_{экв}$ коэффициент запаса прочности для данного напряжённого состояния вычисляется по простой формуле:

$$n = \frac{\sigma_{TP}}{\sigma_{экв}} \qquad (X.1)$$

или

$$n = \frac{\sigma_{BP}}{\sigma_{экв}} \qquad (X.2)$$

Само $\sigma_{экв}$ вычисляется по формуле, содержащей все или некоторые компоненты напряжённого состояния σ_i и τ_{ij}. Проще работать с главными напряжениями – обнуляются все τ.

Механизмы деформирования различных материалов также могут различаться. Поэтому и теорий прочности существует несколько. Теории, в которых за предельным состоянием предполагается начало пластических деформаций, называются ***теориями текучести***, а теории, в которых за предельным состоянием предполагается начало трещинообразования, называются ***теориями разрушения***.

Теория максимального касательного напряжения

Пластические деформации в металлах – это результат взаимного проскальзывания слоев в кристаллических решетках под действием касательных напряжений τ:

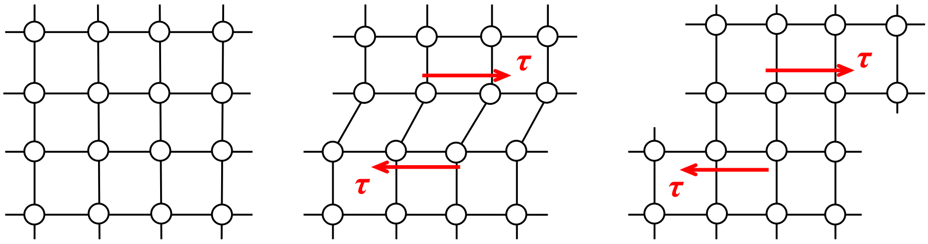
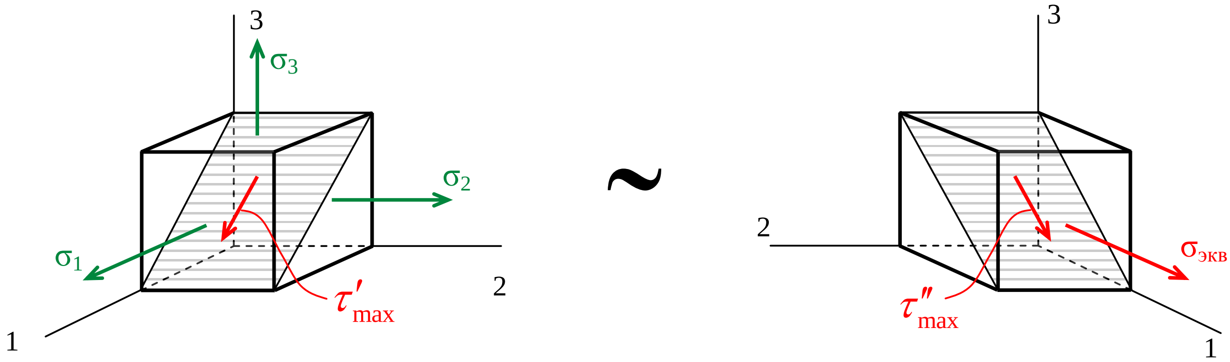


Рис. X.4.

На основании вышесказанного, критерием равноопасности напряжённых состояний в двух точках тела может служить равенство в них максимальных касательных напряжений τ_{max}, которые, как известно (*рис.VIII.9.*), равны полуразностям главных напряжений σ_1 и σ_3.



$$\tau'_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

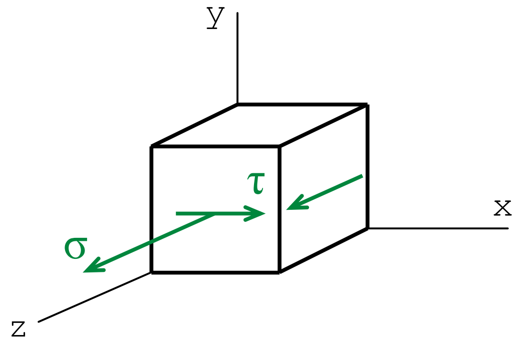
$$\tau''_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{\sigma_{экв} - 0}{2} = \frac{\sigma_{экв}}{2}$$

$$\tau'_{\max} = \tau''_{\max}$$

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{\sigma_{экв}}{2}$$

$$\boxed{\sigma_{экв} = \sigma_1 - \sigma_3} \qquad (X.3)$$

В частном случае для упрощённого плоского напряжённого состояния:



$$\sigma' = 0$$

$$\sigma^{'','''} = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2}\right)^2 + \tau^2} =$$

$$= \frac{0 + \sigma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{0 - \sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} = \frac{\sigma}{2} \pm \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\sigma^2 + 4 \cdot \tau^2}$$

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$$

$$\sigma_1 = \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\sigma^2 + 4 \cdot \tau^2}$$

$$\sigma_2 = 0$$

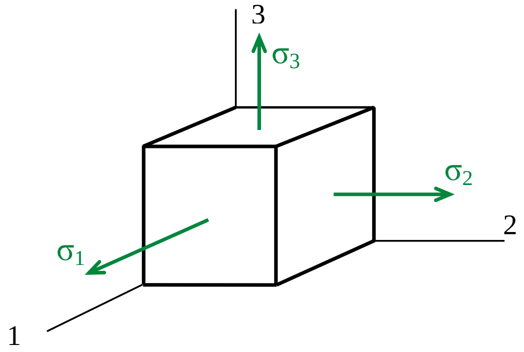
$$\sigma_3 = \frac{\sigma}{2} - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\sigma^2 + 4 \cdot \tau^2}$$

$$\sigma_{экв} = \sigma_1 - \sigma_3 = \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\sigma^2 + 4 \cdot \tau^2} - \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\sigma^2 + 4 \cdot \tau^2}$$

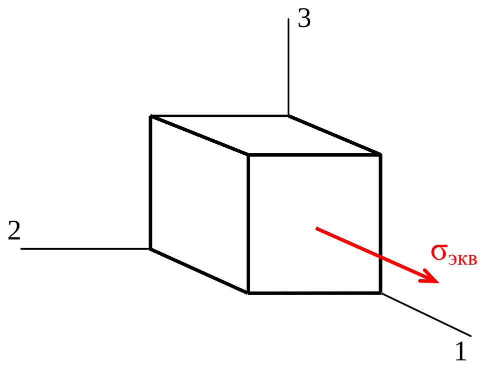
$$\boxed{\sigma_{экв} = \sqrt{\sigma^2 + 4 \cdot \tau^2}} \qquad (X.4)$$

Энергетическая теория

Два напряжённых состояния считаются равноопасными, если им соответствует одна и та же энергия формоизменения. Именно эта часть удельной потенциальной энергии участвует в разрушении материала. В общем случае напряжённого состояния:



$\sim$



$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$

$\sigma_1 = \sigma_{экв}$

$\sigma_2 = 0$

$\sigma_3 = 0$

$$u_ф' = \frac{1+\nu}{6 \cdot E} \cdot \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right]$$

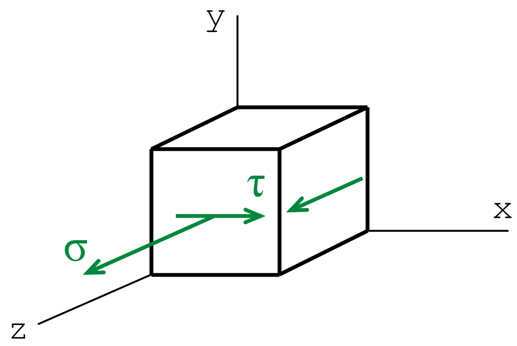
$$u_ф'' = \frac{(1+\nu)}{6 \cdot E} \cdot 2 \cdot \sigma_{экв}^2$$

$$u_ф' = u_ф''$$

$$\left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right] = 2 \cdot \sigma_{экв}^2$$

$$\boxed{\sigma_{экв} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right]}} \qquad (X.5)$$

В частном случае для упрощённого плоского напряжённого состояния:



$$\sigma' = 0$$

$$\sigma^{'','''} = \frac{\sigma_z + \cancel{\sigma_x}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_z - \cancel{\sigma_x}}{2}\right)^2 + \tau^2} = \frac{\sigma}{2} \pm \frac{1}{2}\cdot\sqrt{\sigma^2 + 4\cdot\tau^2}$$

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$$

$$\sigma_1 = \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2}\cdot\sqrt{\sigma^2 + 4\cdot\tau^2}$$

$$\sigma_2 = 0$$

$$\sigma_3 = \frac{\sigma}{2} - \frac{1}{2}\cdot\sqrt{\sigma^2 + 4\cdot\tau^2}$$

$$\sigma_{экв} = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{\left(\frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2}\cdot\sqrt{\sigma^2 + 4\cdot\tau^2}\right)^2 + \left(-\frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2}\cdot\sqrt{\sigma^2 + 4\cdot\tau^2}\right)^2 + \left(-\sqrt{\sigma^2 + 4\cdot\tau^2}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \cancel{\frac{\sigma}{2}\cdot\sqrt{\sigma^2 + 4\cdot\tau^2}} + \frac{1}{4}\cdot\left(\sigma^2 + 4\cdot\tau^2\right) + \left(-\frac{\sigma}{2}\right)^2 - \cancel{\frac{\sigma}{2}\cdot\sqrt{\sigma^2 + 4\cdot\tau^2}} + \frac{1}{4}\cdot\left(\sigma^2 + 4\cdot\tau^2\right) + \left(\sigma^2 + 4\cdot\tau^2\right)} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2\cdot\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \frac{6}{4}\cdot\left(\sigma^2 + 4\cdot\tau^2\right)} = \sqrt{\frac{\sigma^2}{4} + \frac{3}{4}\cdot\sigma^2 + \frac{3}{4}\cdot 4\cdot\tau^2} = \sqrt{\sigma^2 + 3\cdot\tau^2}$$

$$\boxed{\sigma_{экв} = \sqrt{\sigma^2 + 3\cdot\tau^2}} \qquad (X.6)$$

Теория прочности Мора

Рассмотренные ранее теории прочности применимы для расчёта весьма пластичных материалов, имеющих равные по модулю пределы текучести (*рис.II.7.*) при растяжении и при сжатии $\sigma_{TP} = |\sigma_{TC}|$.

При расчётах конструкций из умеренно пластичных ($\sigma_{TP} < |\sigma_{TC}|$) и хрупких ($\sigma_{BP} < |\sigma_{BC}|$, а σ_T нет вообще) материалов пользуются формулой теории прочности Мора:

$$\boxed{\sigma_{экв} = \sigma_1 - k \cdot \sigma_3} \qquad (X.7)$$

где

$k = \dfrac{\sigma_{TP}}{|\sigma_{TC}|}$ - для умеренно пластичных материалов;

$k = \dfrac{\sigma_{BP}}{|\sigma_{BC}|}$ - для хрупких материалов.

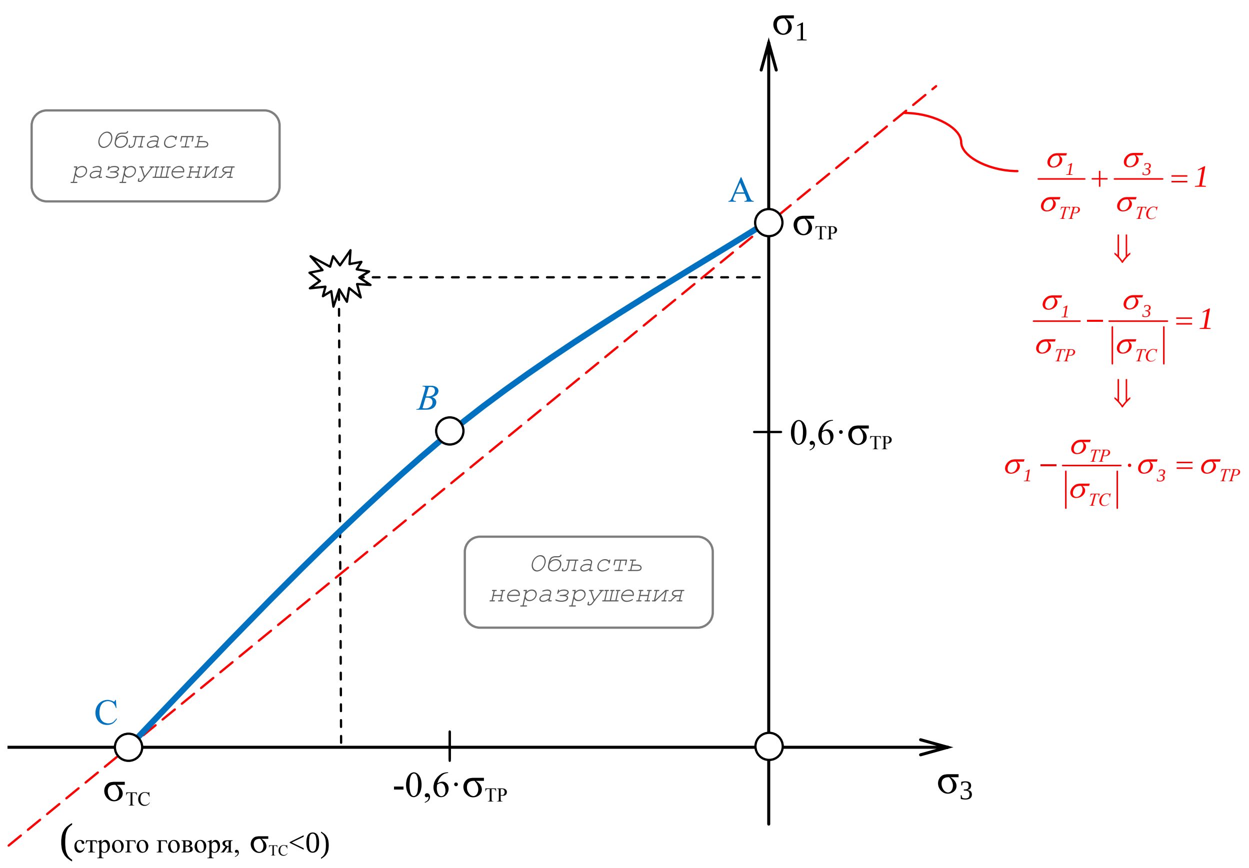
Формула Мора является результатом обобщения экспериментальных данных и имеет несколько толкований. Наиболее простое из них – схематизация экспериментальной диаграммы предельных состояний (см. *рис. X.5.*):

ABC – диаграмма предельных состояний;

AC – схематизация диаграммы предельных состояний: прямая, уравнение которой $\sigma_{TP} = \sigma_1 - \dfrac{\sigma_{TP}}{|\sigma_{TC}|} \cdot \sigma_3$.

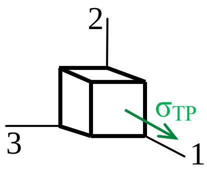
Условия наступления предельного состояния: $\sigma_{экв} = \sigma_{TP}$

$$\sigma_{экв} = \sigma_{TP} = \sigma_1 - \frac{\sigma_{TP}}{|\sigma_{TC}|} \cdot \sigma_3 = \sigma_1 - k \cdot \sigma_3$$



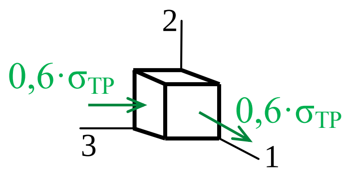
т. А – *предельное состояние при одноосном растяжении*:

$$\sigma_1=\sigma_{TP}$$
$$\sigma_2=0$$
$$\sigma_3=0$$



т. В – *предельное состояние при чистом сдвиге*:

$$\sigma_1=\frac{\sigma_{TP}}{\sqrt{3}}\approx 0{,}6\cdot\sigma_{TP}$$
$$\sigma_2=0$$
$$\sigma_3=-0{,}6\cdot\sigma_{TP}$$



При этом (рис. III.13.): $\tau_T=\sigma_1=-\sigma_3=\dfrac{\sigma_{TP}}{\sqrt{3}}$

По энергетической теории: $\sigma_{экв}=\sqrt{3\cdot\tau^2}=\sigma_{TP}$ *– предельное состояние.*

т.С – *предельное состояние при одноосном сжатии*:

$$\sigma_1=0$$
$$\sigma_2=0$$
$$\sigma_3=\sigma_{TC}$$

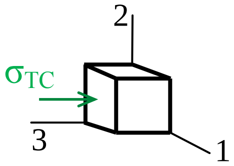
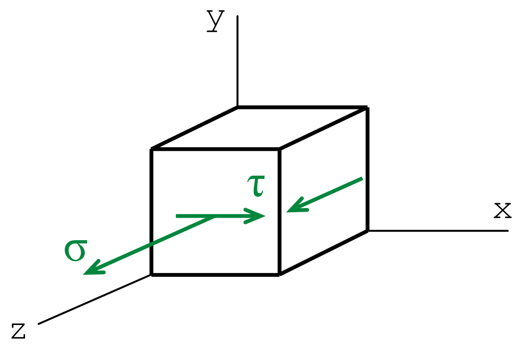


Рис. X.5.

В частном случае для упрощённого плоского напряжённого состояния:



$$\sigma' = 0$$

$$\sigma'',''' = \frac{\sigma_z + \cancel{\sigma_x}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_z - \cancel{\sigma_x}}{2}\right)^2 + \tau^2} = \frac{\sigma}{2} \pm \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\sigma^2 + 4 \cdot \tau^2}$$

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$$

$$\sigma_1 = \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\sigma^2 + 4 \cdot \tau^2}$$

$$\sigma_2 = 0$$

$$\sigma_3 = \frac{\sigma}{2} - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\sigma^2 + 4 \cdot \tau^2}$$

$$\sigma_{экв} = \sigma_1 - k \cdot \sigma_3 =$$

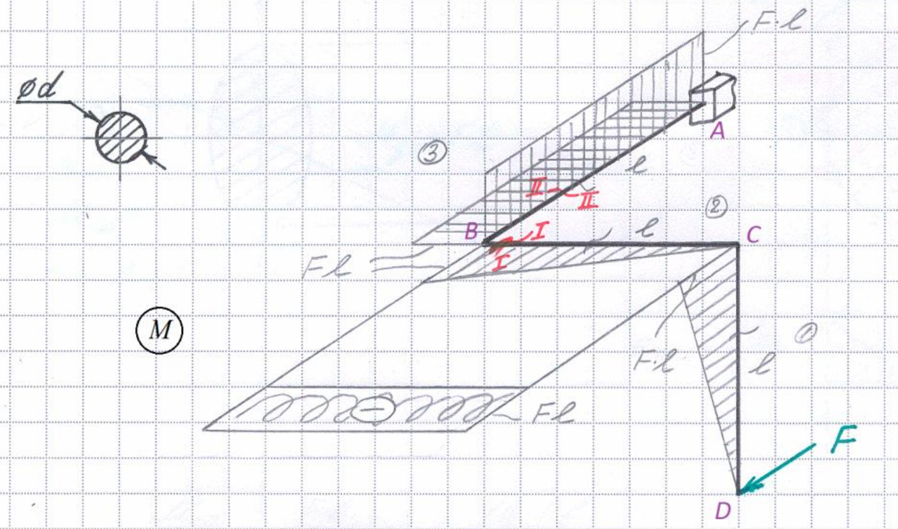
$$= \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\sigma^2 + 4 \cdot \tau^2} - k \cdot \frac{\sigma}{2} + \frac{k}{2} \cdot \sqrt{\sigma^2 + 4 \cdot \tau^2} =$$

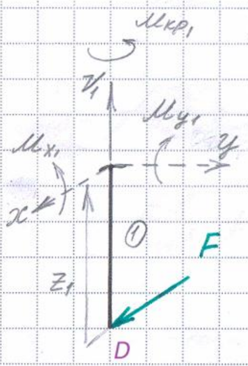
$$= \frac{1-k}{2} \cdot \sigma + \frac{1+k}{2} \cdot \sqrt{\sigma^2 + 4 \cdot \tau^2}$$

$$\boxed{\sigma_{экв} = \frac{1-k}{2} \cdot \sigma + \frac{1+k}{2} \cdot \sqrt{\sigma^2 + 4 \cdot \tau^2}} \qquad (X.8)$$

1 Пример расчёта коэффициента запаса прочности пространственной рамы:

Дано: F, d, l, $\sigma_т = \sigma_{тр} = -\sigma_{тс}$





$\sum M_{z_1} = 0 = M_{кр_1}$

$M_{кр_1} = 0$

$\sum M_y = 0 = M_{y_1} + F \cdot z_1$

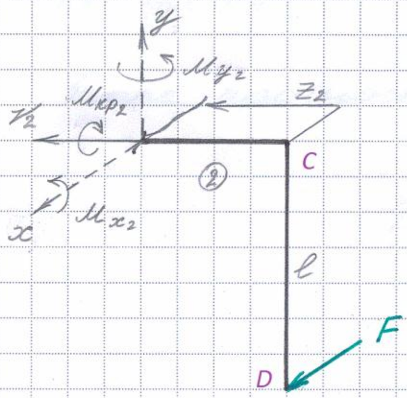
$M_{y_1} = -F \cdot z_1$

$z_1 = 0: \ M_{y_1} = 0$

$z_1 = l: \ M_{y_1} = -Fl$

$\sum M_x = 0 = M_{x_1}$

$M_{x_1} = 0$



$\sum M_{z_2} = 0 = M_{кр_2} + Fl$

$M_{кр_2} = -Fl$

$\sum M_y = 0 = M_{y_2} - F \cdot z_2$

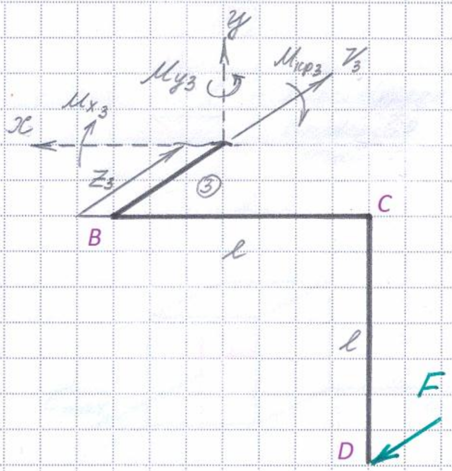
$M_{y_2} = F \cdot z_2$

$z_2 = 0: \ M_{y_2} = 0$

$z_2 = l: \ M_{y_2} = F \cdot l$

$\sum M_x = 0 = M_{x_2}$

$M_{x_2} = 0$



$\sum M_{z_3} = 0 = M_{кр_3}$

$M_{кр_3} = 0$

$\sum M_y = 0 = M_{y_3} - F \cdot l$

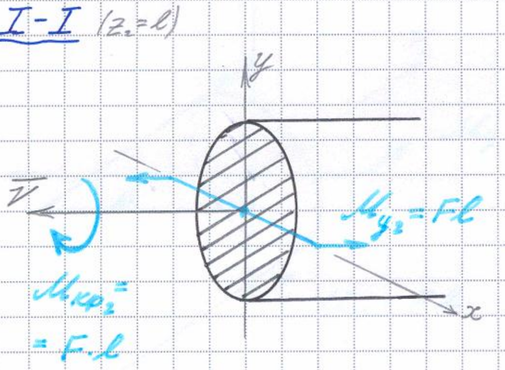
$M_{y_3} = Fl$

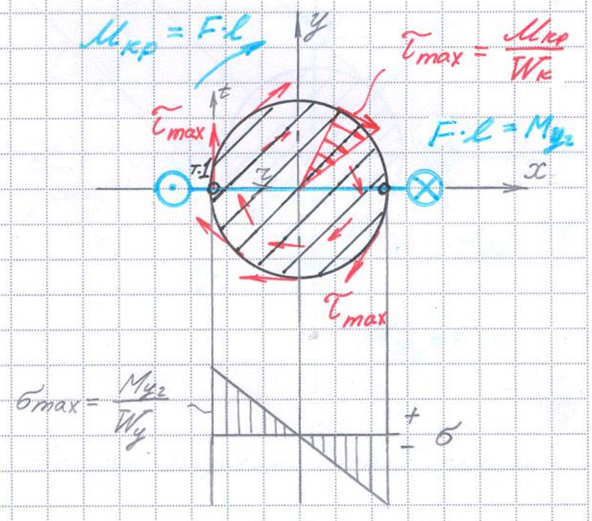
$\sum M_x = 0 = M_{x_3} + F \cdot l$

$M_{x_3} = -F \cdot l$

Опасные сечения: I-I и II-II

I-I ($z_2 = l$)

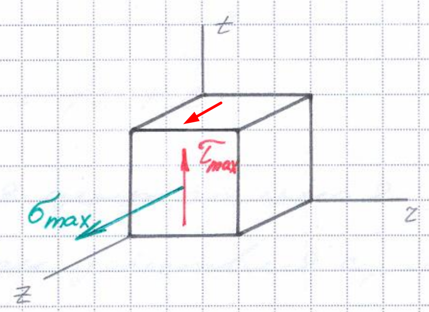




$$\tau_{max} = \frac{M_{кр}}{W_к} = \frac{F\ell}{\pi d^3/16} = \frac{16\cdot F\ell}{\pi d^3}$$

$$\sigma_{max} = \frac{M_{y_2}}{W_y} = \frac{F\cdot\ell}{\pi d^3/32} = \frac{32\cdot F\cdot\ell}{\pi d^3}$$

т. 1 - наиболее опасная точка.



$$\sigma_{экв}^{I-I} = \sqrt{\sigma_{max}^2 + 3\cdot\tau_{max}^2} =$$

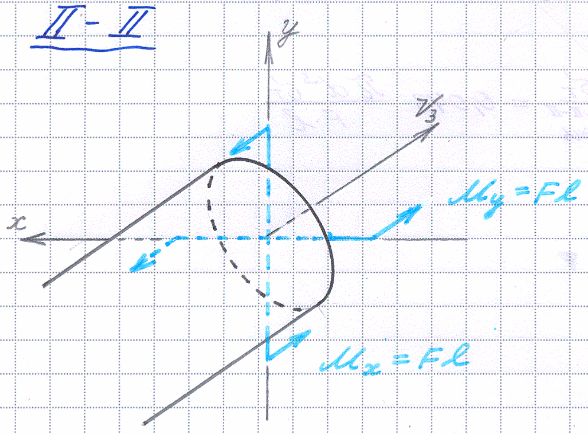
$$= \frac{F\ell}{\pi d^3}\sqrt{32^2 + 3\cdot 16^2} \approx \frac{42 F\ell}{\pi d^3}$$

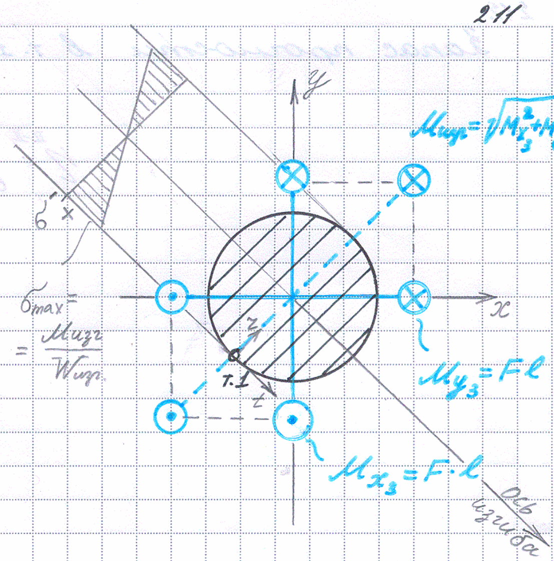
Энергетическая теория прочности, т.к. $\sigma_{тр} = |\sigma_{тс}|$

Запас прочности в т.1 сечения I-I:

$$n^{I-I} = \frac{\sigma_т}{\sigma_{экв}^{I-I}} = \frac{\pi d^3\cdot\sigma_т}{F\cdot\ell}\cdot 0{,}024$$

II - II





Для фигур, имеющих три и более осей симметрии, любая центральная ось является главной. Для таких фигур поперечных сечений (квадрат, круг) изгибающие моменты можно векторно складывать, у таких сечений косого изгиба нет.

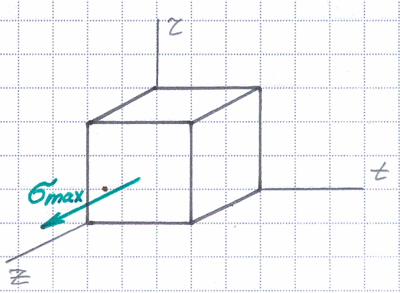
$$M_{изг} = \sqrt{M_{x_3}^2 + M_{y_3}^2} = \sqrt{(F\ell)^2 + (F\cdot\ell)^2} = \sqrt{2}\cdot F\cdot\ell$$

а осью изгиба будет главная центральная ось, перпендикулярная плоскости действия суммарного изгибающего момента.

$$\sigma_{max} = \frac{M_{изг}}{W_{изг}} = \frac{\sqrt{2}\cdot F\cdot\ell}{\pi d^3/16} =$$

$$= \frac{16\sqrt{2}\cdot F\ell}{\pi d^3} \approx 23\,\frac{F\cdot\ell}{\pi d^3}$$

т. 1 – опасная точка.



$$\sigma_{экв}^{II-II} = \sigma_{max} = \frac{23\cdot F\cdot\ell}{\pi\cdot d^3}$$

Запас прочности в т. 1. в сечении II-II:

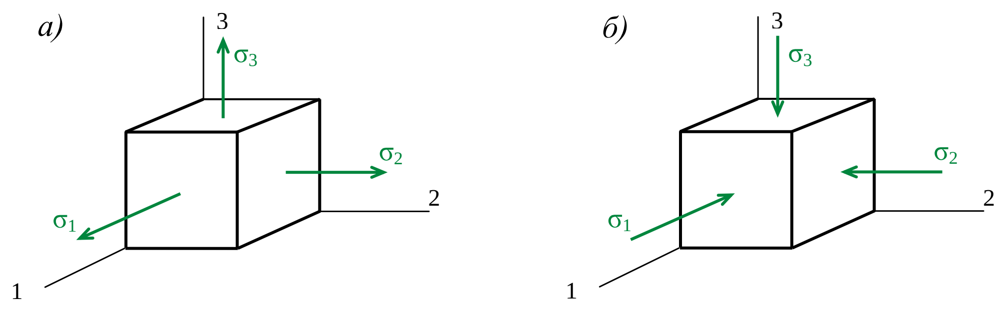
$$\eta^{II-II} = \frac{\sigma_T}{\sigma_{экв}^{II-II}} = 0{,}043\,\frac{\pi d^3 \sigma_T}{F\cdot l}$$

Запас прочности всей конструкции — наименьший из запасов прочности её точек:

$$\eta = \min\left(\eta^{I-I}, \eta^{II-II}\right) = \eta^{I-I} = 0{,}024\,\frac{\pi d^3 \sigma_T}{F\cdot l}$$

В заключении хотелось бы заметить: расчёты по всем, существующим на данный момент теориям прочности, дают удовлетворительные результаты только в том случае, когда в напряжённом состоянии доминирует девиатор, то есть экстремальные главные напряжения σ_1 и σ_3 имеют разные знаки, либо одно из них равно нулю.

В случае, когда все главные напряжения одного знака



в напряжённом состоянии доминирует шаровой тензор и на результаты расчётов $\sigma_{экв}$ по формулам теорий прочности полагаться нельзя, необходимо проводить экспериментальные исследования.

Схема *а)* пусть не вводит в заблуждение схожестью с предыдущими рисунками, просто, когда значения главных напряжений неизвестны, их принято изображать в положительном направлении.

Теория Гриффитса хрупкого трещинообразования

Из-за структурных дефектов (трещин, микропор, включений, дислокаций, вакансий) реальная прочность материала оказывается значительно ниже теоретической.

Хрупким называется материал, сохраняющий упругие свойства вплоть до разрушения.

Разрушение хрупкого материала – результат развития трещин, присутствовавших в нём изначально. Гриффитс попытался определить условие (критерий), по достижении которого первоначально «спящие» в материале трещины начинают интенсивно расти.

Гриффитс предположил, что:

1) Чтобы увеличить существующую трещину, нужно дополнительно «порвать» материал у её вершины: создать внутри детали две свободные поверхности и ***затратить*** на это некоторую энергию ΔW;
2) Увеличение трещины понижает напряжения в её окрестности; при этом ***высвобождается*** потенциальная энергия ΔU;

ΔW – величина постоянная для данного материала, а $\Delta U \sim (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$.

Когда напряжения достигнут определённого уровня, ΔU сравняется с ΔW и трещина начнёт расти самопроизвольно.

Представим себе сквозную поперечную трещину длиной l у края растянутой полоски из хрупкого материала (*рис. X.6а.*). Во всём объёме полоски напряжения σ распределены равномерно, за исключением вершины трещины (там локальный всплеск напряжений) и области сверху и снизу от трещины (там напряжения будут снижены вплоть до нуля). Для удобства расчёта зоной напряжений, существенно меньших σ будем считать полукруг радиусом l (*рис. X.6а.*), это недалеко от истины.

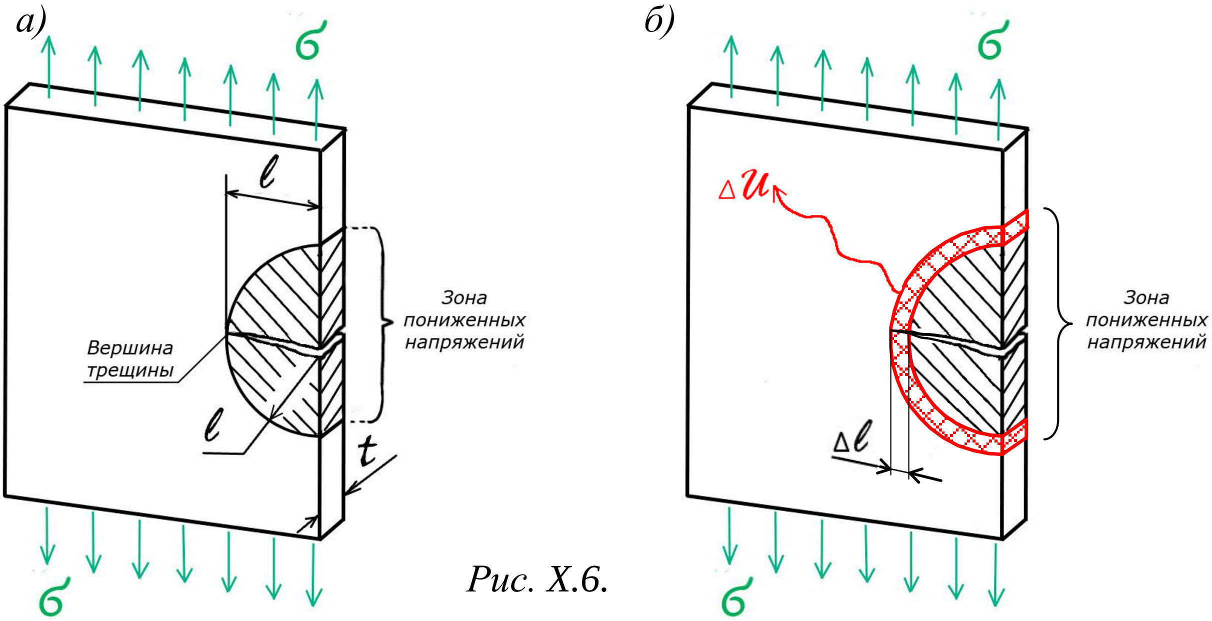


Рис. X.6.

Потенциальная энергия в единице напряжённого объёма (см. формулу *VIII.15*):

$$u_0 = \frac{1}{2 \cdot E} \cdot \left[\overset{\sigma^2}{\sigma_1^2} + \cancel{\sigma_2^2} + \cancel{\sigma_3^2} - 2 \cdot \nu \cdot \left(\cancel{\sigma_1 \cdot \sigma_2} + \cancel{\sigma_2 \cdot \sigma_3} + \cancel{\sigma_3 \cdot \sigma_1} \right) \right] = \frac{\sigma^2}{2 \cdot E}$$

Трещина получает небольшое приращение Δl (*рис. X.6б.*). Объём зоны пониженных напряжений, радиусом которой является длина трещины, увеличится на

$$\Delta V = \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \left(2 \cdot \pi \cdot l \right)}_{\text{длина полуокружности}} \cdot \underbrace{\Delta l}_{\text{толщина}} \cdot \overset{\text{ширина}}{t} = \pi \cdot l \cdot \Delta l \cdot t$$

Потенциальная энергия изменится на

$$\Delta u = u_0 \cdot \Delta V = \frac{\sigma^2}{2 \cdot E} \cdot \pi \cdot l \cdot \Delta l \cdot t$$

Работа по раскрытию трещины (работа, затраченная на образование двух свободных поверхностей):

$$\Delta W = \underbrace{2}_{\text{две поверхности}} \cdot \gamma \cdot \underbrace{\Delta l \cdot t}_{\text{площадь}}$$

где

$\gamma \approx 0{,}01 \cdot E \cdot r_0 \left[\frac{Н \cdot м}{м^2} \right]$ – работа образования единицы площади свободной поверхности;

r_0 – расстояние между атомами в ненагруженном состоянии (Л.М.Качанов, «Основы механики разрушения», стр. 212).

$\Delta u < \Delta W$ – трещина не растёт;

$\Delta u \geq \Delta W$ – самопроизвольный рост трещины;

$\Delta u = \Delta W$ – критерий роста трещины.

$$\frac{\sigma^2}{2 \cdot E} \cdot \pi \cdot l \cdot \cancel{\Delta l} \cdot \cancel{t} = 2 \cdot \gamma \cdot \cancel{\Delta l} \cdot \cancel{t}$$

$$\boxed{\frac{\sigma^2 \cdot \pi \cdot l}{E} = 4 \cdot \gamma}$$

Энергетический критерий Гриффитса роста трещины (1920 г.). *(X.9)*

Польза формулы *(X.9)* – в установлении связи между растягивающими напряжениями σ и длиной трещины l.

Если известно напряжение σ , можно быть уверенными , что трещины, длиной меньше l расти не будут. Тем более, что формула *(X.9)* выведена для идеального хрупкого материала и не учитывает свойств материала реального, тормозящих развитие трещины: пластичность, неоднородности и т.д.

В вершине реальной трещины происходит пластическая деформация металла, причём затрачиваемая на неё работа может быть гораздо больше поверхностной энергии γ идеально хрупкого разрушения.

Эту работу, как заметили Ирвин и Орован в 1952 г., можно учесть в рамках той же схемы Гриффитса, если приписать поверхностной энергии более широкий смысл и в формуле *(X.9)* заменить γ на $(\gamma + \gamma_p)$:

$$\boxed{\frac{\sigma^2 \cdot \pi \cdot \ell}{E} = 4 \cdot (\gamma + \gamma_p)} \qquad \textit{(X.10)}$$

где

γ_p – работа пластической деформации при образовании единицы поверхности; для стали: $\gamma_p \approx 10^3 \cdot \gamma$ (Качанов, стр. 214) – именно столь значительная пластическая работа и обеспечивает хорошее сопротивление металлов разрушению.

Критерий Ирвина
развития трещины

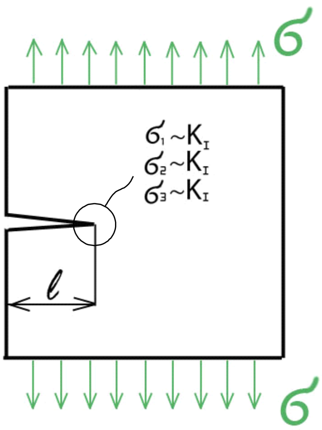
Кроме энергетического подхода (Гриффитса) к анализу развития трещин, основанного на законе сохранения и превращения энергии, существует также силовой подход (Ирвина) к рассмотрению данного явления, предполагающий начало развития трещины в том случае, когда напряжения при её вершине достигнут определённого уровня.

Расчёты методами теории упругости и теории пластичности показали: величины главных напряжений при вершине пропорциональны множителю, именуемому ***коэффициентом интенсивности напряжений (КИН)***

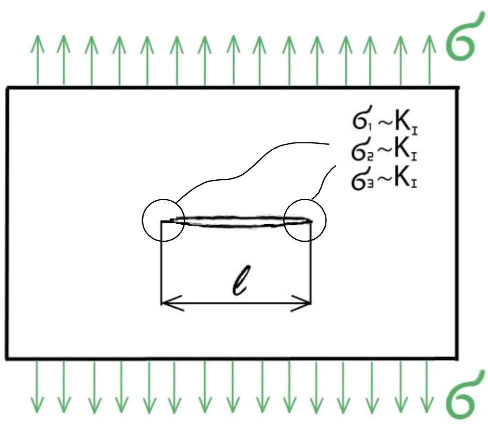
$$K = \sigma \cdot \sqrt{\ell} \cdot C$$

где

C – безразмерный числовой коэффициент, зависящий от формы трещины:



$K_I = 1{,}12 \cdot \sigma \cdot \sqrt{\pi \cdot \ell}$



$K_I = \sigma \cdot \sqrt{\pi \cdot \ell}$

и т.д.

При увеличении напряжения σ в детали страгивание трещины с места начинается по достижении коэффициентом K некоторого критического значения K_C.

K_C такая же характеристика материала, как модуль упругости, определяется экспериментально.

Формула

$$\boxed{K_C = \sigma \cdot \sqrt{\ell} \cdot C} \qquad \textit{(X.11)}$$

так же, как и формула *(X.9)* устанавливает связь между равномерными напряжениями σ, действующими на трещину и длиной ℓ этой трещины, начиная с которой трещина растёт самопроизвольно:

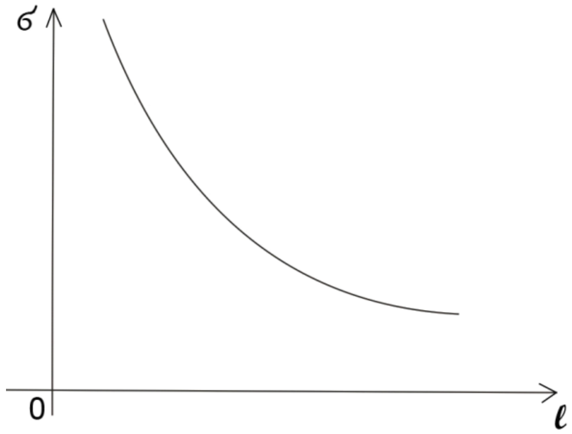


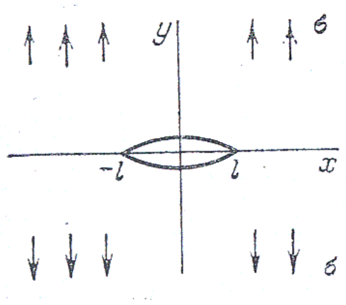
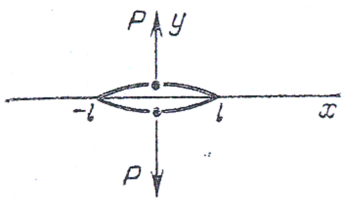
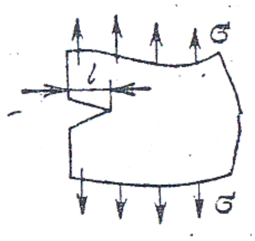
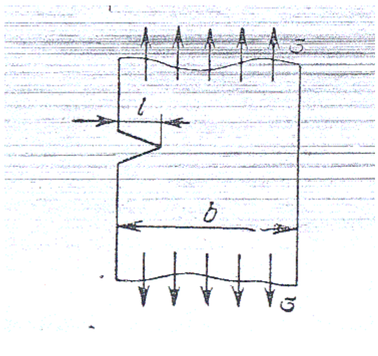
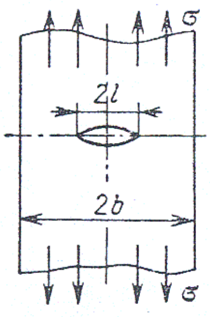
Рис. X.7.

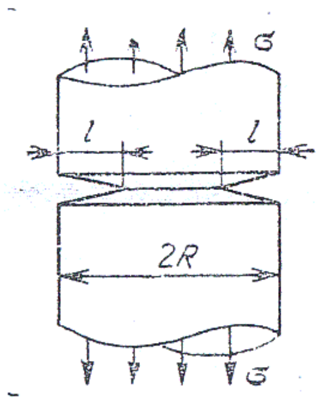
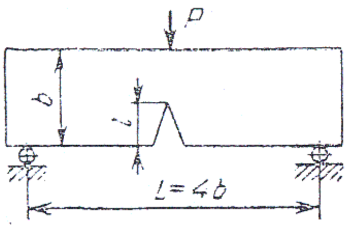
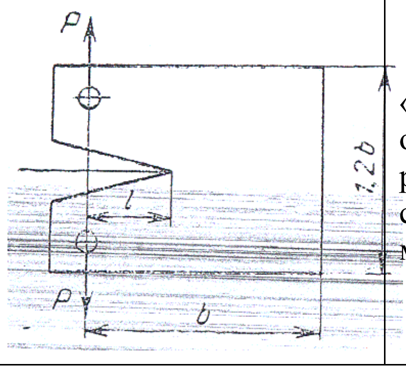
Условие прочности:

$$\sigma < \frac{K_C}{C \cdot \sqrt{\ell}} \qquad \textit{(X.12)}$$

Таблица

Коэффициенты интенсивности напряжений

Номер схемы	Форма образца и схема нагружения	Условие нагружения	Формула для коэффициента интенсивности напряжений
1		Неограниченная плоскость с трещиной, растяжение перпендикулярно трещине	$K = \sigma \cdot \sqrt{\pi \cdot \ell}$
2		Неограниченная плоскость с трещиной, растяжение сосредоточенными силами	$K = \dfrac{P}{\sqrt{\pi \cdot \ell}}$
3		Полуплоскость с краевой поперечной трещиной, растяжение перпендикулярно трещине	$K = 1{,}12 \cdot \sigma \cdot \sqrt{\pi \cdot \ell} = 1{,}99 \cdot \sigma \cdot \sqrt{\ell}$
4		Полоса с краевой поперечной трещиной, осевое растяжение	$K = \sigma \cdot \sqrt{\ell} \cdot C(\lambda)$, $\lambda = \dfrac{l}{b}$ $(\lambda < 0{,}7)$ $C(\lambda) = 1{,}99 - 0{,}41 \cdot \lambda + 18{,}70 \cdot \lambda^2 - 38{,}48 \cdot \lambda^3 + 53{,}85 \cdot \lambda^4$
5		Полоса с центральной поперечной трещиной, осевое растяжение	$K = \sigma \cdot \sqrt{\pi \cdot \ell} \cdot C(\lambda)$, $\lambda = \dfrac{l}{b}$ $(\lambda < 0{,}7)$ $C(\lambda) = 1 + 0{,}128 \cdot \lambda - 0{,}288 \cdot \lambda^2 - 1{,}525 \cdot \lambda^3$

Номер схемы	Форма образца и схема нагружения	Условие нагружения	Формула для коэффициента интенсивности напряжений
6		Цилиндр с внешней кольцевой трещиной, осевое растяжение	$K=\sigma\cdot\sqrt{\ell}\cdot C(\lambda)$, $\lambda=\frac{l}{R}$ $\lambda=0{,}03 \quad C=1{,}88$ $0{,}05 \quad 1{,}82$ $0{,}1 \quad 1{,}66$ $0{,}2 \quad 1{,}41$ $0{,}4 \quad 1{,}01$
7		Балка с краевой поперечной трещиной, изгиб сосредоточенной силой	$K=\frac{6\cdot P\cdot\sqrt{\ell}}{t\cdot b}\cdot C(\lambda)$, $\lambda=\frac{l}{b} \quad (\lambda<0{,}6)$ $C(\lambda)=1{,}93-3{,}07\cdot\lambda+$ $+14{,}53\cdot\lambda^2-25{,}1\cdot\lambda^3+$ $+25{,}8\cdot\lambda^4$
8		«Компактный» образец, растяжение сосредоточенными силами	$K=\frac{P\cdot\sqrt{\ell}}{t\cdot b}\cdot C(\lambda)$, $\lambda=\frac{l}{b}$ $C(\lambda)=29{,}6-185\cdot\lambda+$ $+655\cdot\lambda^2-1017\cdot\lambda^3+$ $+639\cdot\lambda^4$

В.З.Партон, «Механика разрушения. От теории к практике.»

Пластическая поправка Ирвина: при вычислении КИН следует искусственно (фиктивно) увеличить длину трещины на половину длины пластической зоны.

Вычисление КИН

методом конечных элементов:

В.З.Партон, Е.М.Морозов

«Механика упруго-пластического разрушения», стр. 57, 61.

1 Энергетический метод
(метод податливости):

Метод не требует мелких элементов и местного сгущения сетки. Отличается хорошей точностью.

1. Рассчитывается тело с трещиной длиной ℓ, подсчитывается упругая энергия U, либо непосредственно, либо, как работа внешних сил;

2. Трещине даётся приращение длины $\Delta\ell$, снова производится расчёт, определяется приращение ΔU;

3. Рассчитывается интенсивность освобождения упругой энергии:

$$G = \pm\frac{\partial U}{\partial \ell} \approx \frac{\Delta U}{\Delta \ell} \qquad (X.13)$$

4. КИН с интенсивностью освобождения упругой энергии связан формулами:

$$G = \left(1-\nu^2\right)\cdot\frac{K^2}{E} \text{ – для плоского деформированного состояния} \qquad (X.14)$$

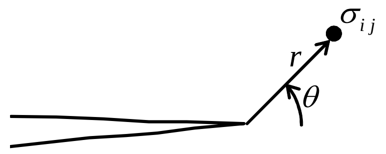
$$G = \frac{K^2}{E} \text{ – для плоского напряжённого состояния} \qquad (X.15)$$

Здесь ν – коэффициент Пуассона.

2 Прямой метод:

Напряжения в окрестности вершин трещины выражаются формулами:

$$\sigma_{ij} = \frac{K_I}{\sqrt{r}} \cdot f_{ij}\left(\theta\right) \qquad (X.16)$$



Зная σ_{ij} из численного расчёта и $f_{ij}\left(\theta\right)$ из расчёта аналитического можно вычислить K_I. Метод требует значительного сгущения сетки КЭ в окрестности вершин трещины. Использовать следует квадратичные КЭ, длина стороны которых при удалении от вершины трещины увеличивается пропорционально $\sqrt{r}$.