

Дано: l

$$b = l/20$$

$$h = \frac{3}{2} b$$

E

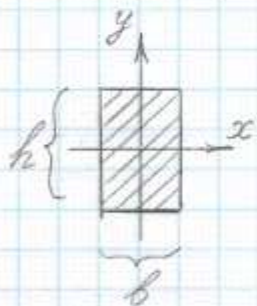
$$\nu = 0,25$$

F

Найти: Построить эпюры внутренних изгибающих и крутящих моментов в стержневых рамах.

Решение

Начинаем с расчёта геометрических характеристик поперечного сечения стержневой рамы и вывода соотношений между их показателями на изгиб и на кручение:



$$J_x = \frac{b \cdot h^3}{12} = \frac{b \left(\frac{3}{2}b\right)^3}{12} = \frac{27}{8 \cdot 12} b^4 = \frac{27}{96} b^4 = \frac{9}{32} b^4;$$

$$J_y = \frac{h \cdot b^3}{12} = \frac{\left(\frac{3}{2}b\right) b^3}{12} = \frac{1}{8} b^4 = \frac{4}{9} J_x;$$

$$J_k = \beta \cdot h \cdot b^3 = 0,196 \cdot \frac{3}{2} \cdot b^4 = \frac{147}{500} b^4 = \frac{392}{375} J_x;$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{E}{2(1+0,25)} = \frac{2}{5} E;$$

$$\frac{1}{GJ_k} = \frac{5}{2E \cdot \frac{392}{375} J_x} = \frac{1875}{784} \frac{1}{EJ_x};$$

$$\frac{1}{EJ_y} = \frac{1}{E \cdot \frac{4}{9} J_x} = \frac{9}{4} \frac{1}{EJ_x} = \frac{1764}{784} \frac{1}{EJ_x}.$$

Теперь приступаем к основной части решения:

I. Вычисление степени статической неопределенности:

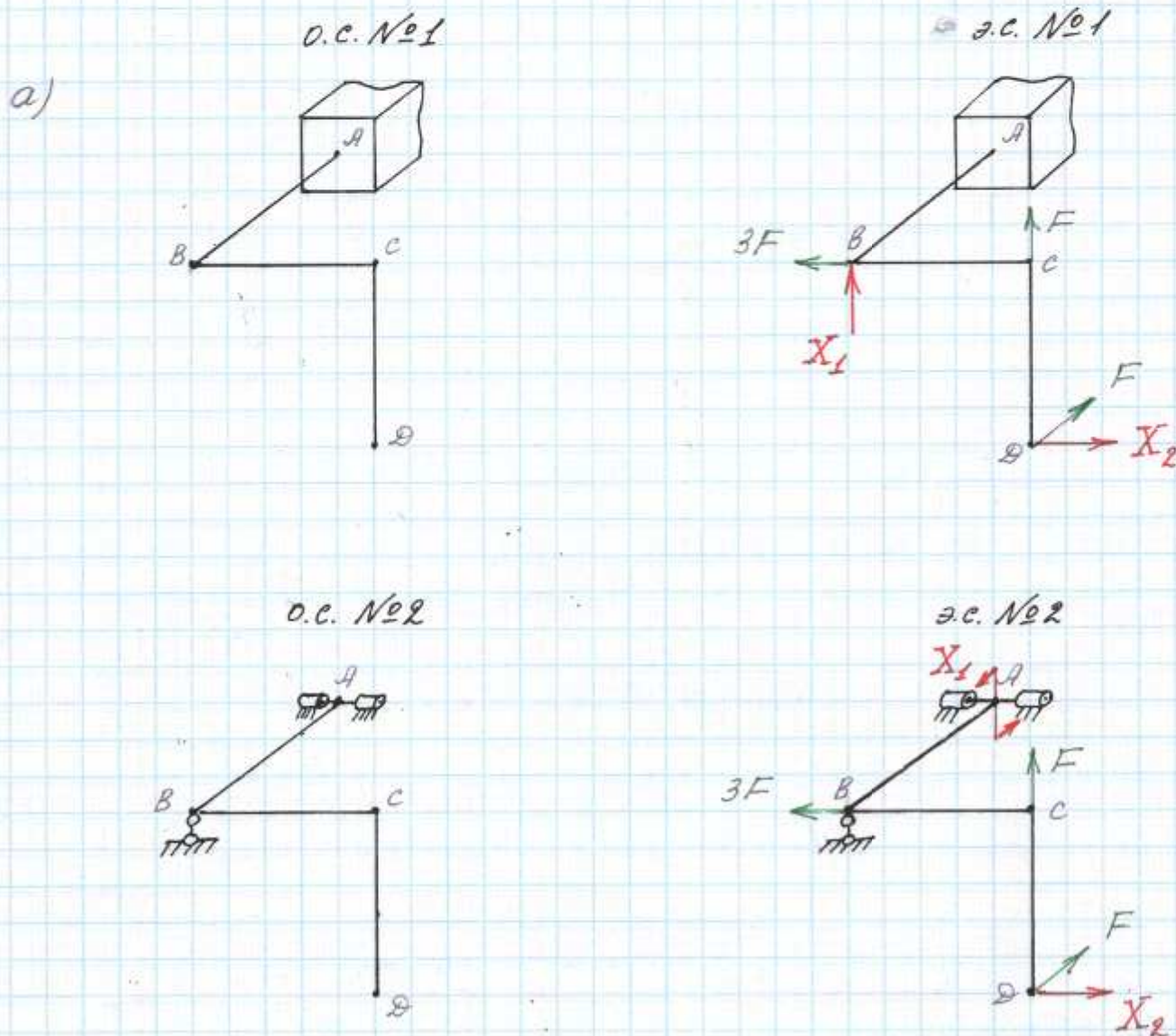
$$a) n_{\text{внеш. св.}} = \overset{A}{6} + \overset{B}{1} + \overset{D}{1} = 8$$

$$b) n_{\text{внутр. св.}} = 6 \cdot K = 6 \cdot 0 = 0$$

$$в) n = (n_{\text{внеш. св.}} + n_{\text{внутр. св.}}) - 6 = (8 + 0) - 6 = 2$$

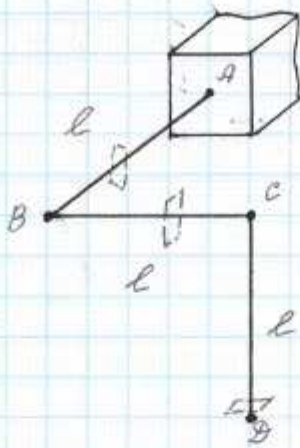
↑
количество независимых уравнений статического равновесия в пространстве

II. Раскрытие статической неопределенности:

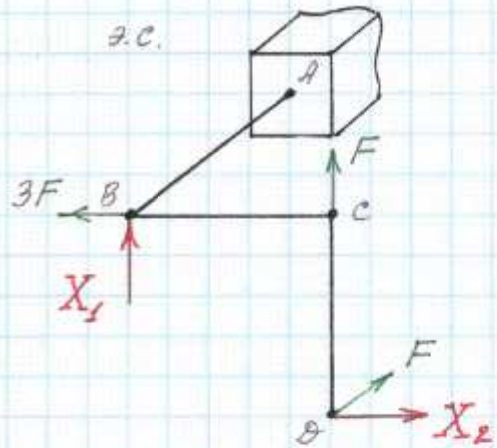


б) Для последующих расчётов выбираем основную и эквивалентную системы №1:

о.с.



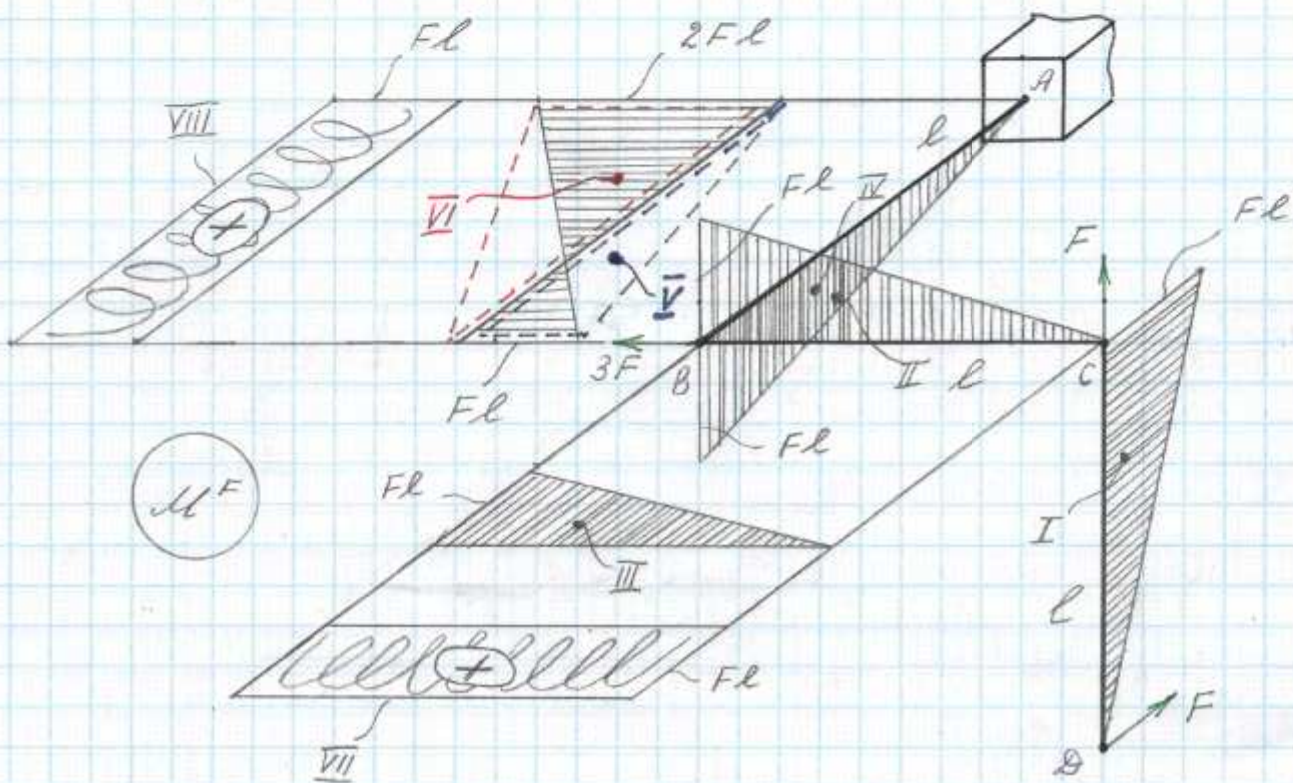
э.с.

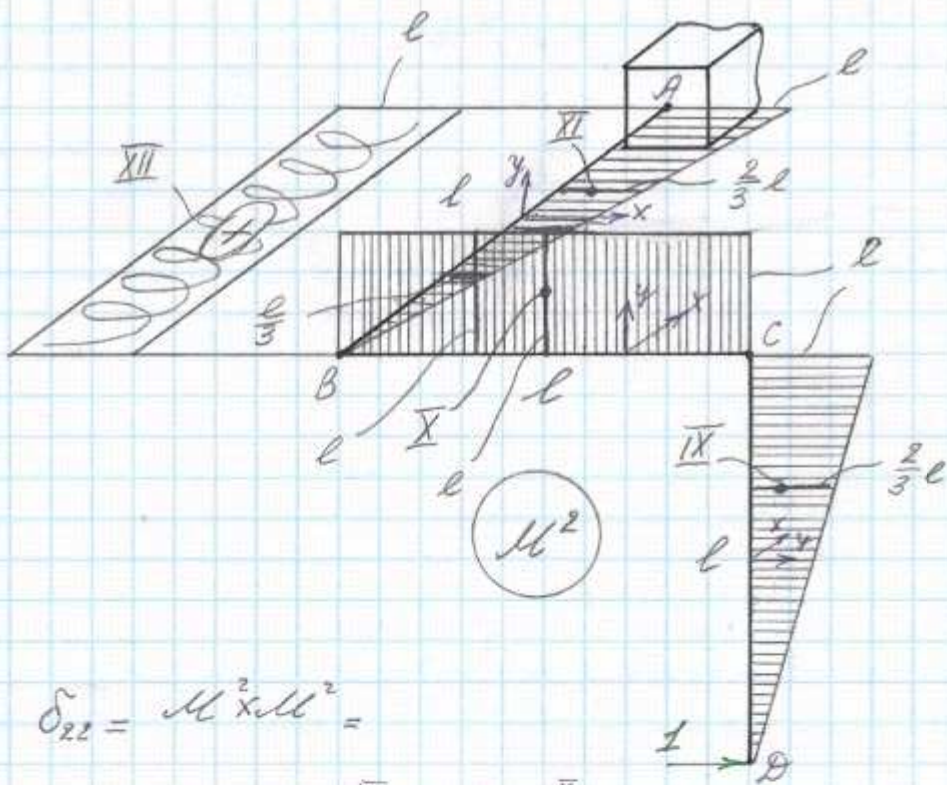


в) Система канонических уравнений для $n=2$:

$$\begin{cases} X_1 \cdot \delta_{11} + X_2 \cdot \delta_{12} + \delta_{1F} = 0 \\ X_1 \cdot \delta_{21} + X_2 \cdot \delta_{22} + \delta_{2F} = 0 \end{cases}$$

г) Вычисление коэффициентов системы:





$$\delta_{22} = M^2 \times M^2 =$$

$$= \frac{1}{EJ_x} \left[\left(\frac{\sqrt{2} \cdot l \cdot l}{3} \right) \frac{2}{3} l + (l \cdot l) \cdot l \right] +$$

$$+ \frac{1}{EJ_y} \left[\left(\frac{\sqrt{2} \cdot l \cdot l}{3} \right) \frac{2}{3} l \right] +$$

$$+ \frac{1}{GJ_k} \left[(l \cdot l) \cdot l \right] =$$

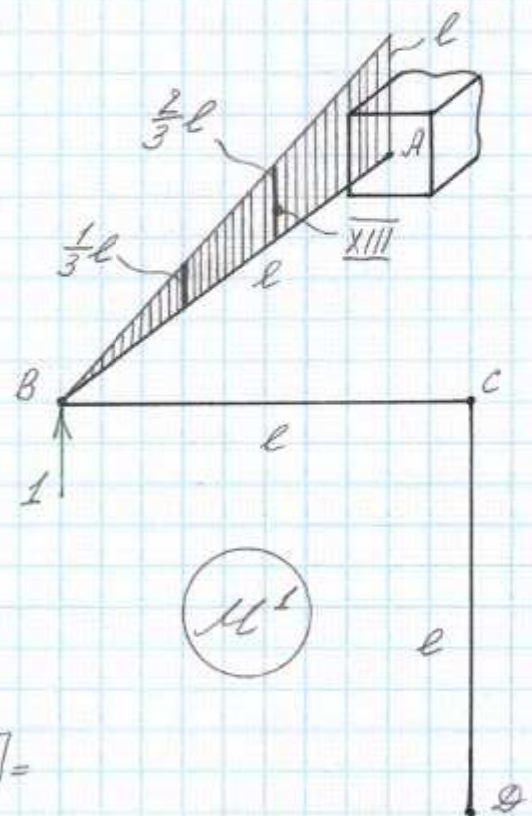
$$= \frac{l^3}{EJ_x} \left[\frac{1}{3} + 1 \right] \cdot 784 +$$

$$+ \frac{1764}{784} \cdot \frac{l^3}{EJ_x} \left[\frac{1}{3} \right] +$$

$$+ \frac{1875}{784} \cdot \frac{l^3}{EJ_x} \frac{3}{3} =$$

$$= \frac{l^3}{784 EJ_x} \left[\frac{3136}{3} + \frac{1764}{3} + \frac{5625}{3} \right] =$$

$$= \frac{10525}{3} \cdot \frac{1}{784} \cdot \frac{l^3}{EJ_x} = \frac{10525}{2352} \cdot \frac{l^3}{EJ_x}$$



$$\delta_{12} = \delta_{21} = M^1 \times M^2 = 0$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EJ_x} \left[\left(\frac{\sqrt{2} \cdot l \cdot l}{3} \right) \frac{2}{3} l \right] = \frac{1}{3} \frac{l^3}{EJ_x}$$

$$= M^1 \times M^1$$

$$\delta_{1F}^{\circ} = \mathcal{M}^I \times \mathcal{M}^F = - \frac{1}{EJ_x} \cdot \left[\left(\frac{1}{2} l \cdot Fl \right) \frac{1}{3} l \right] = - \frac{1}{6} \cdot \frac{Fl^3}{EJ_x};$$

$$\delta_{2F}^{\circ} = \mathcal{M}^2 \times \mathcal{M}^F = \frac{1}{EJ_x} \cdot \left[\left(\frac{1}{2} l \cdot Fl \right) \cdot l \right] +$$

$$+ \frac{1}{EJ_y} \cdot \left[\left(\frac{1}{2} l \cdot Fl \right) \frac{l}{3} - \left(\frac{1}{2} l \cdot 2Fl \right) \cdot \frac{2}{3} l \right] +$$

$$+ \frac{1}{6J_x} \cdot \left[(l \cdot Fl) \cdot l \right] =$$

$$= \frac{Fl^3}{EJ_x} \cdot \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1764}{784} \cdot \left[\frac{1}{6} - \frac{2}{3} \right] + \frac{1875}{784} \right\} =$$

$$= \frac{1}{784} \cdot \frac{Fl^3}{EJ_x} \cdot \left\{ 392 - \frac{1764}{2} + 1875 \right\} = \frac{1385}{784} \cdot \frac{Fl^3}{EJ_x};$$

г) Решаем систему канонических уравнений:

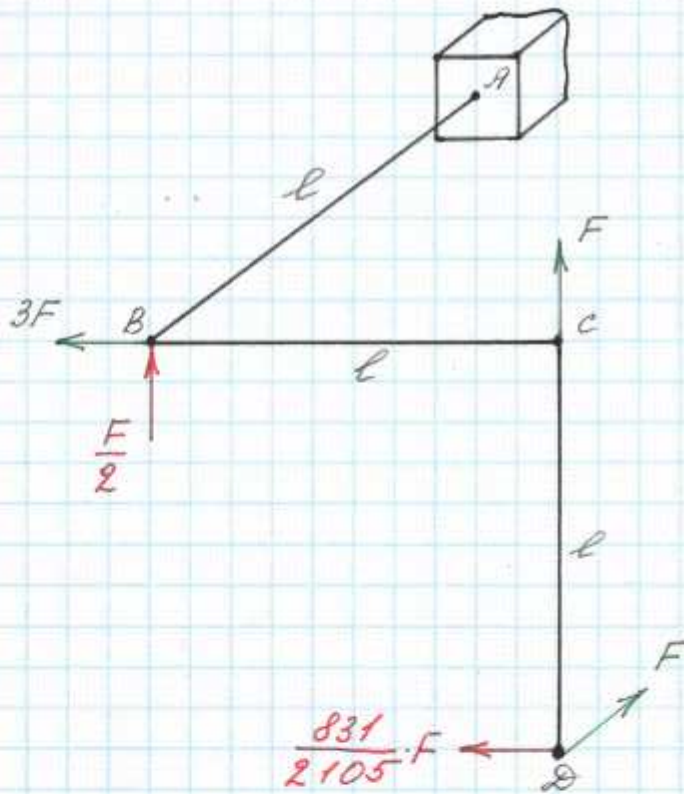
$$\begin{cases} X_1 \delta_{11}^{\circ} + X_2 \delta_{12}^{\circ} + \delta_{1F}^{\circ} = 0 \\ X_1 \delta_{21}^{\circ} + X_2 \delta_{22}^{\circ} + \delta_{2F}^{\circ} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_1 \cdot \frac{1}{3} \frac{l^3}{EJ_x} + X_2 \cdot 0 + \left(-\frac{1}{6} \right) \frac{Fl^3}{EJ_x} = 0 \\ X_1 \cdot 0 + X_2 \cdot \frac{10525}{2352} \cdot \frac{l^3}{EJ_x} + \frac{1385}{784} \cdot \frac{Fl^3}{EJ_x} = 0 \end{cases}$$

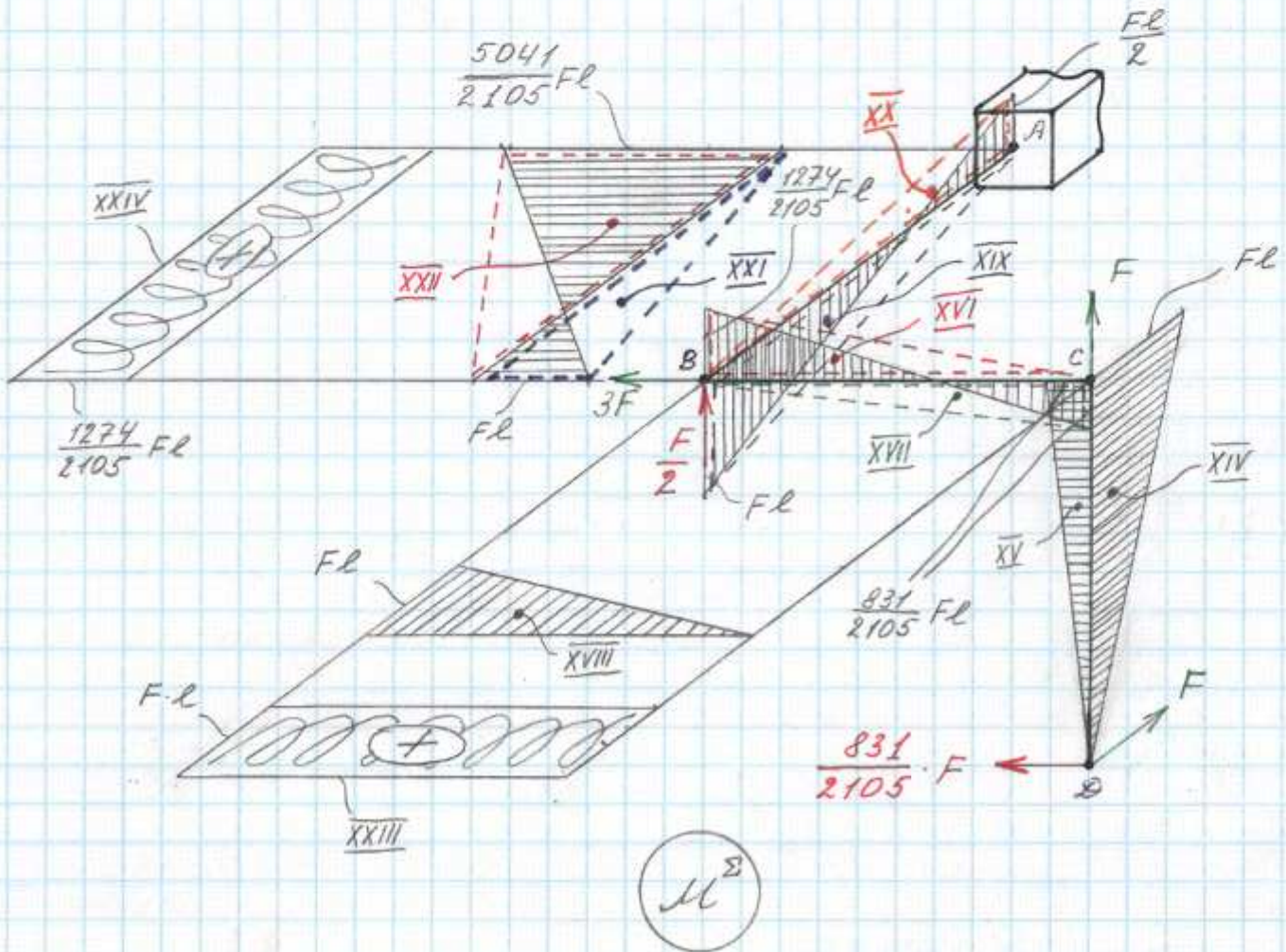
$$X_1 = 3 \frac{EJ_x}{l^3} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{Fl^3}{EJ_x} = \frac{F}{2};$$

$$X_2 = - \frac{2352}{10525} \cdot \frac{EJ_x}{l^3} \cdot \frac{1385}{784} \cdot \frac{Fl^3}{EJ_x} = - \frac{831}{2105} F = -0,3948 \cdot F.$$

e) Итак, эквивалентная система имеет вид:



III. Итоговая эпюра внутренних моментов:

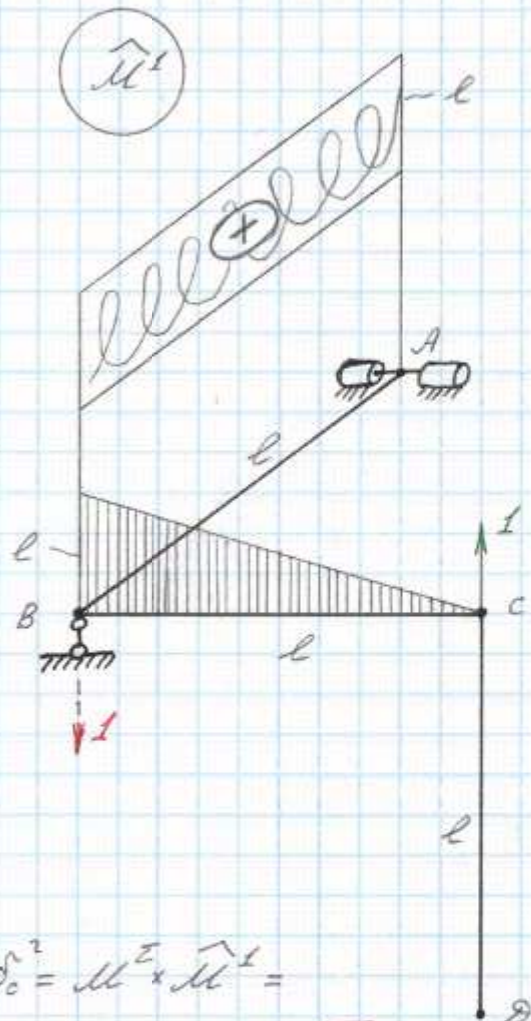
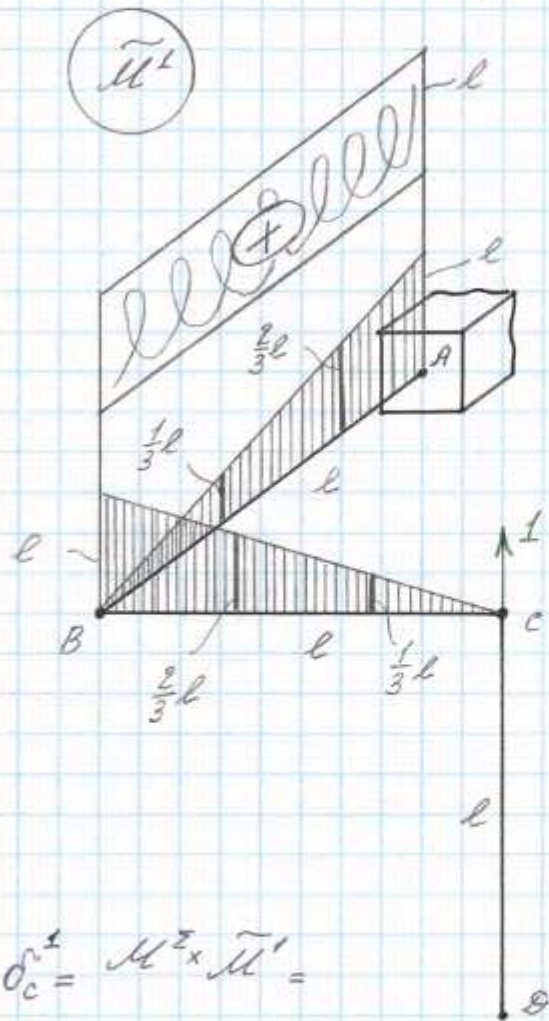


IV. Проверка правильности найденного решения:

Вычислим вертикальное перемещение узла C рамы, используя О.С. №1 и О.С. №2:

О.С. №1

О.С. №2



$$\delta_c^1 = M^2 \times \bar{M}^1 =$$

$$= \frac{1}{EJ_x} \left[\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1274}{2105} Fl \cdot l \right) \cdot \frac{2}{3} l - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{831}{2105} Fl \cdot l \right) \cdot \frac{1}{3} l + \right.$$

$$\left. - \left(\frac{1}{2} Fl \cdot l \right) \cdot \frac{1}{3} l + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{Fl \cdot l}{2} \right) \cdot \frac{2}{3} l \right] +$$

$$+ \frac{1}{GJ_k} \left[\left(\frac{1274}{2105} Fl \cdot l \right) \cdot l \right] =$$

$$= \frac{15678628}{9901920} \cdot \frac{Fl^3}{EJ_x} \approx 1,583 \frac{Fl^3}{EJ_x}$$

$$\delta_c^2 = M^2 \times \hat{M}^1 =$$

$$= \frac{1}{EJ_x} \left[\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1274}{2105} Fl \cdot l \right) \cdot \frac{2}{3} l - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{831}{2105} \cdot Fl \cdot l \right) \cdot \frac{1}{3} \right] +$$

$$+ \frac{1}{GJ_k} \left[\left(\frac{1274}{2105} Fl \cdot l \right) \cdot l \right] =$$

$$= \frac{Fl^3}{EJ_x} \left[\frac{2548}{12630} - \frac{831}{12630} + \frac{1874 \cdot 1274}{784 \cdot 2105} \right]$$

$$= \frac{15678628}{9901920} \cdot \frac{Fl^3}{EJ_x} \approx 1,583 \frac{Fl^3}{EJ_x}$$