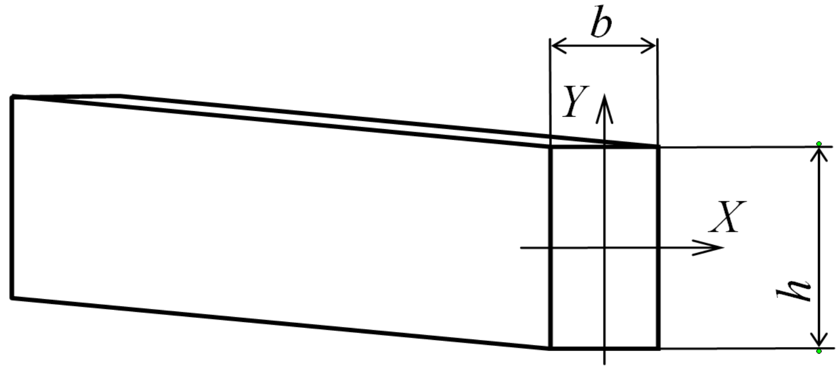
www.tychina.pro

VIII

У п р у г о – п л а с т и ч е с к и й и з г и б.

Стержень прямоугольного поперечного сечения

Рассмотрим прямой чистый изгиб стержня прямоугольного поперечного сечения



Стержень выполнен из идеального упруго-пластического материала:

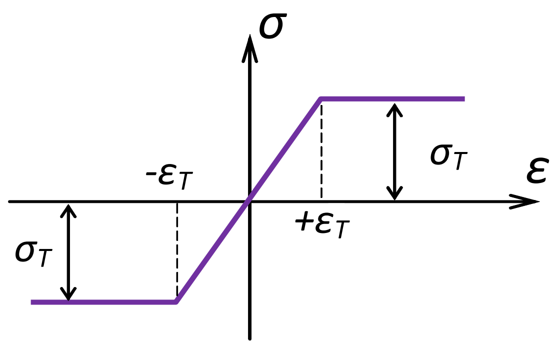
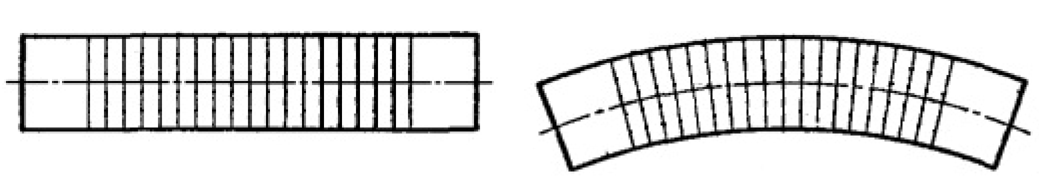
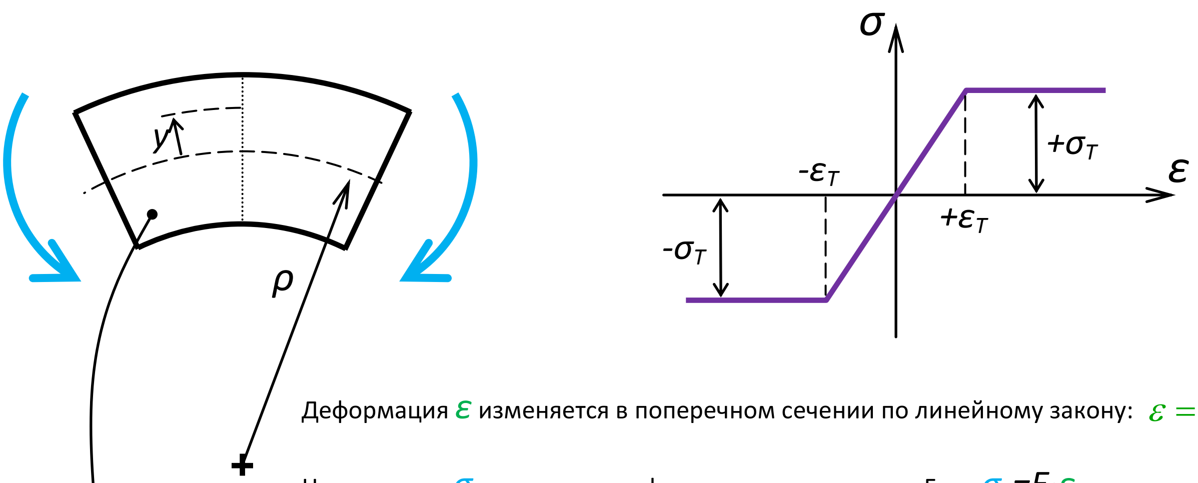


Рис. VIII.1.

Выполняется гипотеза плоских сечений:



С увеличением внутреннего изгибающего момента эпюры напряжений и деформаций в поперечном сечении стержня меняются следующим образом (*см. рис. VIII.2.*):



Деформация ε изменяется в поперечном сечении по линейному закону: $\varepsilon = \dfrac{y}{\rho}$

Напряжения σ следуют за деформациями по закону Гука $\sigma = E \cdot \varepsilon$ вплоть до предела текучести $\pm\sigma_T$, превысить который не могут.

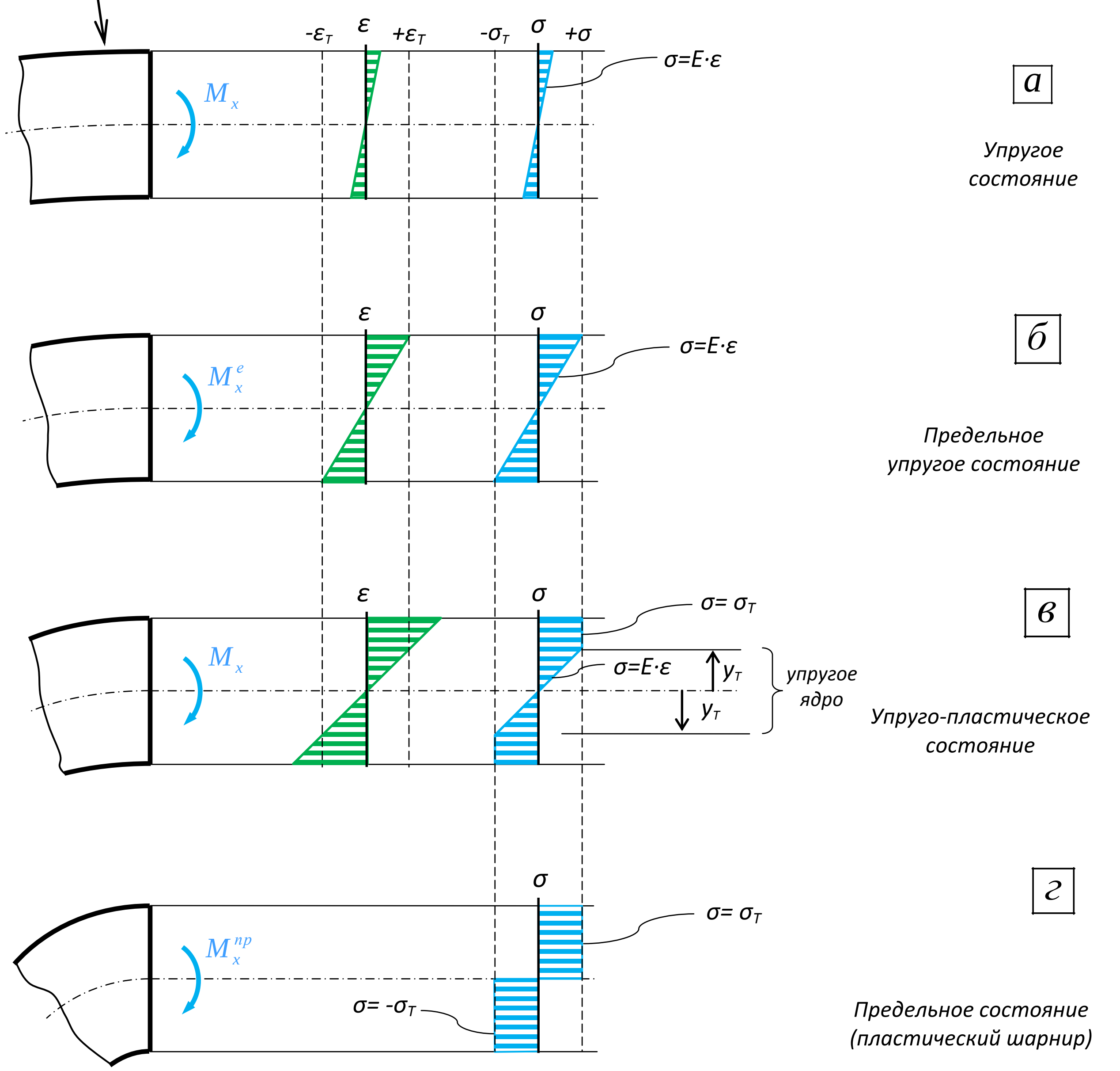


Рис. VIII.2.

$\boxed{a}$ *Упругое состояние:*

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \ ;$$

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{W_x} \ ; \qquad \text{где} \quad W_x = \frac{b \cdot h^2}{6} \ .$$

$\boxed{б}$ *Предельное упругое состояние:*

Верхние и нижние точки поперечного сечения готовы потечь: $\sigma_{\max} = \sigma_T$, $\sigma_{\min} = -\sigma_T$.

Внутренний изгибающий момент M_x, вызывающий такое состояние, называется **предельным упругим** внутренним моментом M_x^e:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon$$

$$\sigma_{\max} = \sigma_T = \frac{M_x^e}{W_x} \qquad => \quad \boxed{M_x^e = \sigma_T \cdot W_x} \qquad \text{(VIII.1)}$$

$\boxed{в}$ *Упруго - пластическое состояние:*

$$\sigma = \begin{cases} +\sigma_T & , \ \varepsilon \ge \varepsilon_T \\ E \cdot \varepsilon & , \ \varepsilon_T \ge \varepsilon \ge -\varepsilon_T \\ -\sigma_T & , \ \varepsilon \le -\varepsilon_T \end{cases}$$

y_T - граница упругой и пластической зон сечения:

$$\varepsilon_T = \frac{y_T}{\rho} \qquad => \qquad y_T = \varepsilon_T \cdot \rho = \frac{\sigma_T}{E} \cdot \rho \qquad \text{(VIII.2)}$$

Чем больше M_x, тем больше кривизна, меньше ρ, и ниже граница y_T.

$\boxed{г}$ *Предельное состояние:*

$y_T = 0$ – пластическая зона охватила всё поперечное сечение стержня.

$$\sigma = \begin{cases} +\sigma_T \text{ , âû ø å í åéòðàëüí î ãî ñëî ÿ.} \\ -\sigma_T \text{ , í èæå í åéòðàëüí î ãî ñëî ÿ.} \end{cases}$$

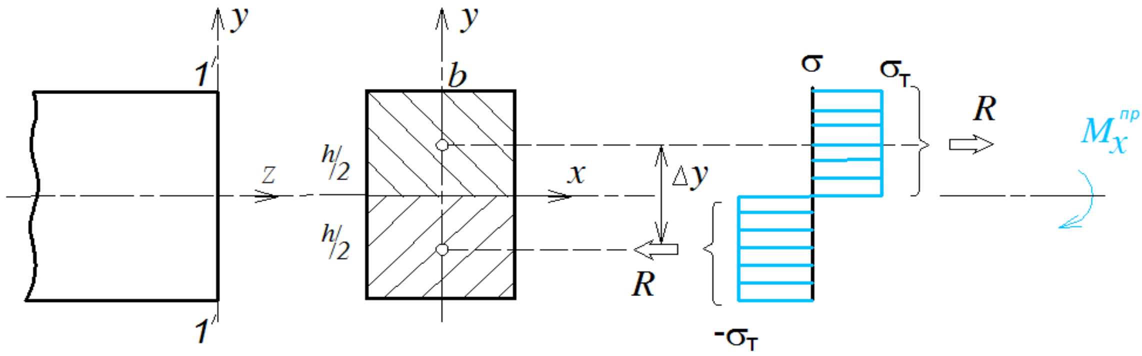
Внутренний изгибающий момент M_x , вызывающий такое состояние называется **предельным**:

$$\boxed{M_x^{пр} = M_{пр} = \sigma_T \cdot W_x^{пл}} \qquad (VIII.3)$$

где

$W_x^{пл} = \dfrac{b \cdot h^2}{4}$ – **пластический момент сопротивления изгибу прямоугольного сечения**. *(VIII.4)*

Формулы (*VIII.3*) и (*VIII.4*) выводятся следующим образом:



$R = (b \cdot \dfrac{h}{2}) \cdot \sigma_T$ - равнодействующая.

$$M_x^{пр} = R \cdot {}_{\Delta} y = b \cdot \frac{h}{2} \cdot \sigma_T \cdot \frac{h}{2} = \underbrace{\frac{b \cdot h^2}{4}}_{W_x^{пл}} \cdot \sigma_T$$ - момент пары сил R.

Внутренний момент M_x не может быть больше предельного значения $M_x^{пр}$. Материал не способен его удержать, ибо напряжения при любых деформациях не могут превзойти отметку $\sigma_Т$ (*рис. VIII.1.*).

Если внешняя нагрузка столь велика, что требует развития внутреннего изгибающего момента большего $M^{пр}$, то начинается динамический процесс пластического деформирования: конструкция необратимо формоизменяется во времени.

Стержень произвольного поперечного сечения

Стадии деформирования стержня с поперечным сечением произвольной формы при чистом упруго-пластическом изгибе аналогичны *рис. VIII.2.* за одним исключением: в процессе упруго-пластического деформирования нейтральный слой постепенно смещается от оси $x_{упр}$ к оси $x_{пласт}$ и в предельном состоянии ($x_{пласт}$) делит поперечное сечение на две части, равные по площади:

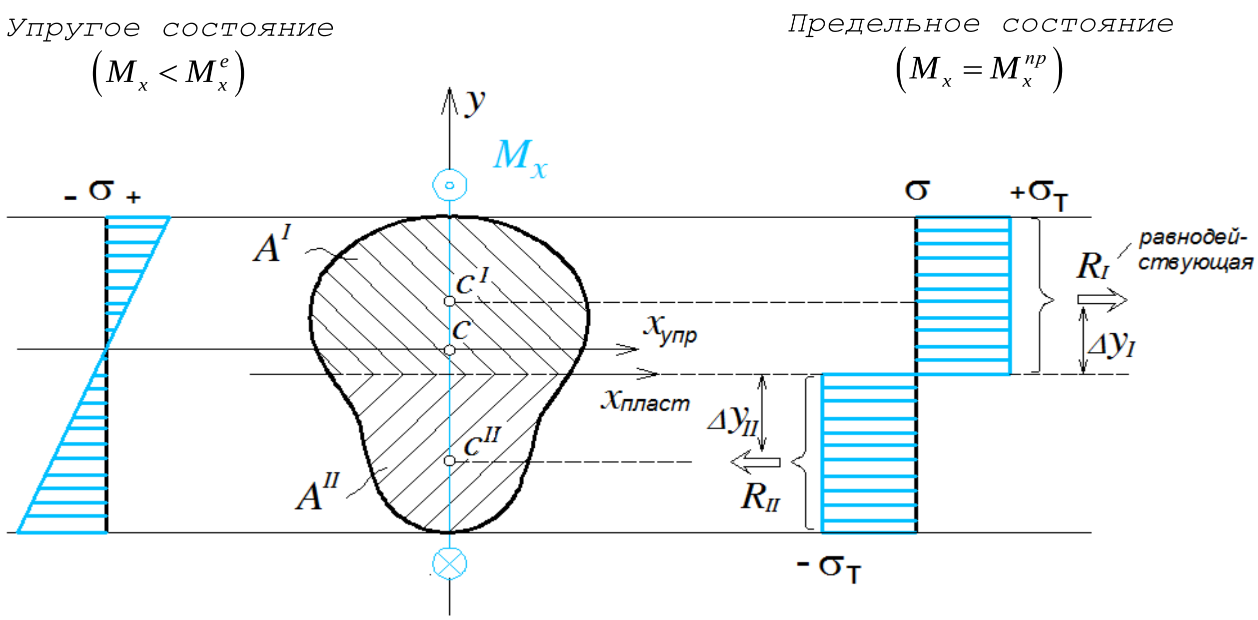


Рис.VIII.3.

статический момент A^{II} относительно оси $x_{пласт}$

$$M_x^{пр} = R_I \cdot {}_\Delta y_I + R_{II} \cdot {}_\Delta y_{II} = \sigma_T \cdot (S^I_{X_{пласт}} + S^{II}_{X_{пласт}})$$

$$\boxed{M_x^{пр} = \sigma_T \cdot (S^I_{X_{пласт}} + S^{II}_{X_{пласт}})} \qquad (VIII.5)$$

$$N = 0 \quad \Rightarrow \quad R_I = R_{II} \quad \Rightarrow \quad \cancel{\sigma_T} \cdot A^I = \cancel{\sigma_T} \cdot A^{II}$$

$$\boxed{A^I = A^{II}} \qquad (VIII.6)$$

Остаточные напряжения

После упруго - пластического изгиба и последующего снятия нагрузки в поперечных сечениях стержня действуют остаточные напряжения.

Закон разгрузки (*рис. II.10.*) одинаково применйм ко всем параметрам упруго-пластического деформирования: деформациям, напряжениям, перемещениям, кривизнам и внутренним силовым факторам.

Для нахождения остаточных напряжений следует из эпюры полных напряжений вычесть эпюру напряжений в идеально упругом материале при той же нагрузке:

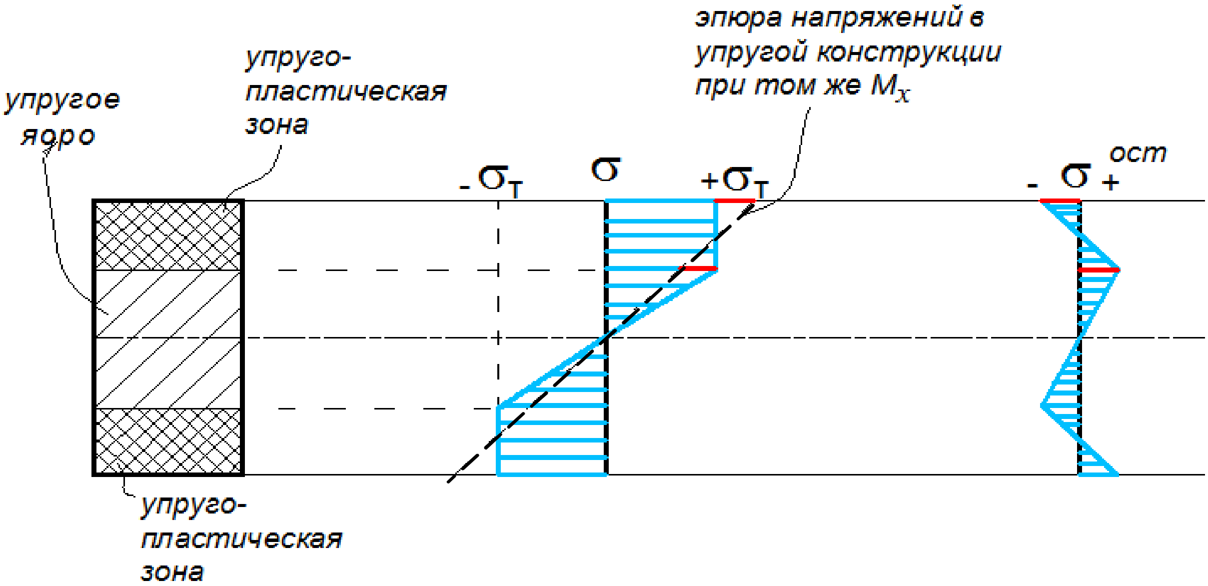


Рис.VIII.4.

Упругая конструкция жёстче упруго-пластической.

При той же нагрузке перемещения в ней будут меньше, меньше будет и наклон эпюры упругих напряжений.

Пластический шарнир

При возрастании внешней нагрузки, в стержневой системе возрастает внутренний изгибающий момент M_x (*рис. VIII.5а…в*) и её поперечные сечения проходят стадии, указанные на *рис. VIII.2*.

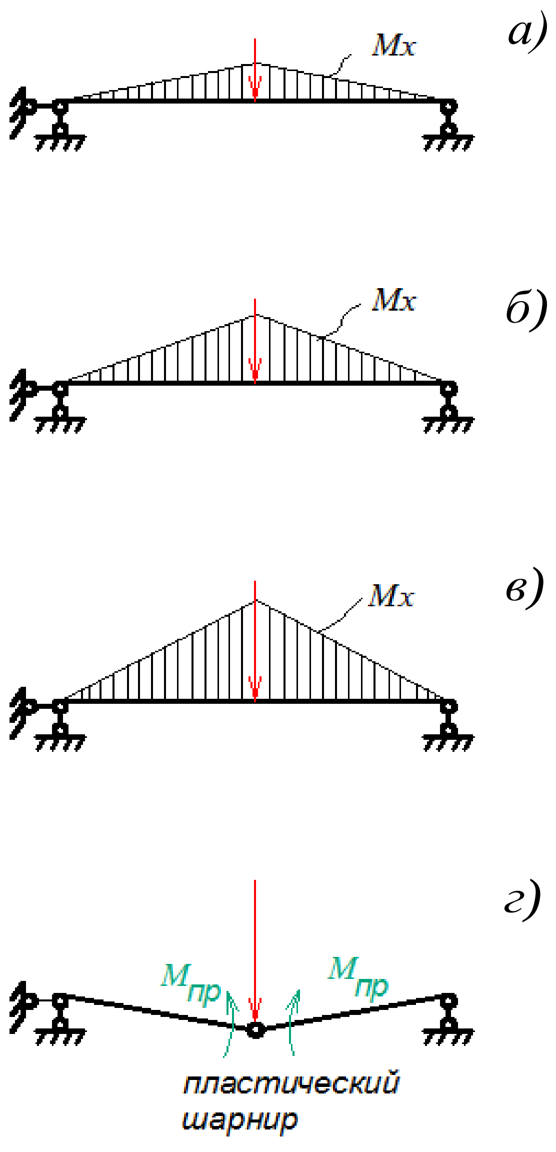


Рис. VIII.5.

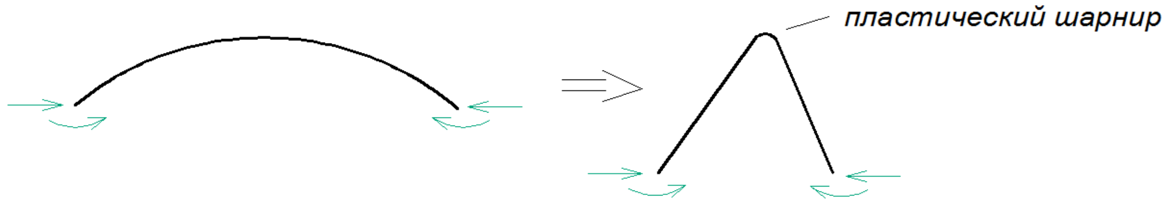
Сечение, в котором M_x максимален первым достигает стадии, близкой к предельной (*рис. VIII.2.г*).

И тут всё меняется.

Неспособный более воспринимать возрастающую нагрузку, материал в окрестности сечения интенсивно течёт, ось стержня значительно искривляется, образуется локальная пластическая зона, именуемая ***пластическим шарниром***, ибо ведёт она себя, как врезанный в стержень шарнир с постоянным моментом трения $M_x^{пр}$, сопротивляющимся перемещению.

Перемещения в конструкции, вызванные образованием пластических шарниров значительно превосходят перемещения от упругих деформаций стержня и, поэтому, при рассмотрении схем с пластическими шарнирами, стержни считаются абсолютно жёсткими.

Эффект образования пластического шарнира может наблюдать каждый из нас, кто двумя руками попытается изогнуть металлический прут. Равномерной дугой прут будет гнуться только в самом начале процесса изгиба, потом же перегнётся в локальной области:



В зависимости от нагрузки и закреплений, пластический шарнир в конструкции может быть один или их может быть несколько; они могут образоваться синхронно или поочерёдно и так далее.

Возникновения одного пластического шарнира уменьшает степень статической неопределимости конструкции на единицу, а статически определимую конструкцию превращает в механизм. Нагрузка, превышение которой приводит этот механизм в движение, называется ***предельной***.

Порядок расчёта статически неопределимых балок по предельным нагрузкам

1) Для заданного поперечного сечения:

а) Определяется местоположение оси пластического изгиба $X_{пласт}$ (*рис.VIII.3.*) из условия:

$$A^{I} = A^{II}$$

б) Вычисляется значение предельного внутреннего изгибающего момента:

$$M_{пр} = \sigma_{T} \cdot (S^{I}_{Xпласт} + S^{II}_{Xпласт})$$

2) Перебираем схемы возможных образований пластических шарниров, для каждой схемы рассчитывается значение предельной нагрузки. Расчёт предельной нагрузки ведётся двумя методами:

4

а) Составлением уравнений равновесия и совместным их решением. Для балки со степенью статической неопределимости *n=1* реакции в опорах и критическая нагрузка находятся из следующей системы:

$$\begin{cases} \sum M = 0\ ;\ \sum F_{y} = 0\ ;\ \sum F_{z} = 0 & \text{– для всей балки} \\ \sum M = 0 & \text{– для крайних участков.} \end{cases}$$

б) Использованием теоремы Лагранжа (принцип возможных перемещений).

3) На практике реализуется та схема, которой соответствует наименьшая предельная нагрузка (это утверждает так называемая ***кинематическая теорема*** теории пластичности).

Замечания:

I) Количество пластических шарниров в схеме должно на единицу превышать степень статической неопределимости балки.

II) Места образования пластических шарниров:

– над промежуточными опорами;

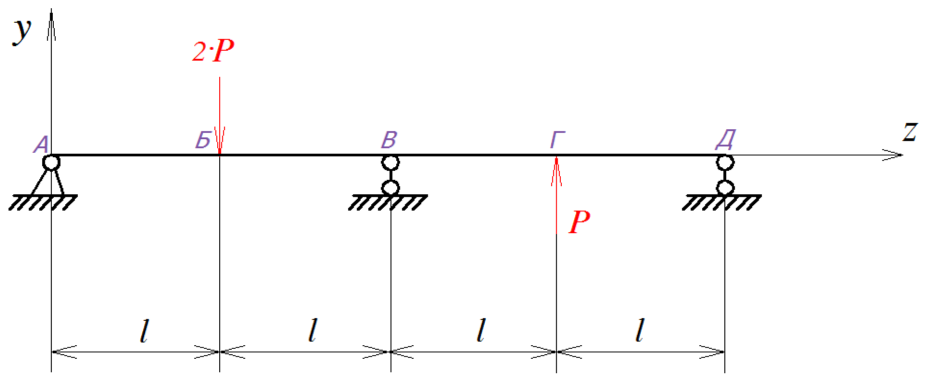
– в заделке;

– под сосредоточенными силами;

– на участках стержня, находящихся под действием распределённой нагрузки (в этом случае локальная координата z_i пластического шарнира находится из систем уравнений).

III) Упругими деформациями участков балки пренебрегаем.

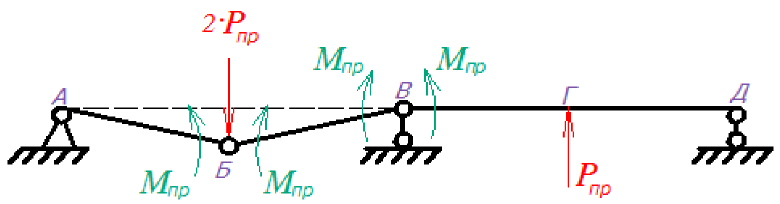
Пример $\boxed{VIII.1}$:



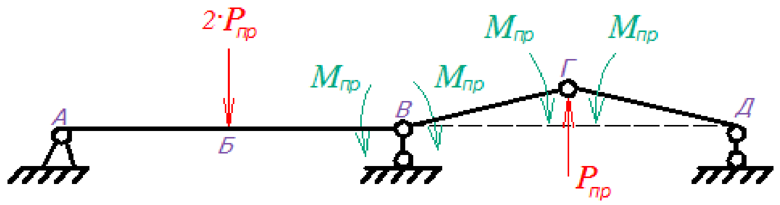
<u>*Решение*</u>

1) $\ldots M_{np} = \ldots.$

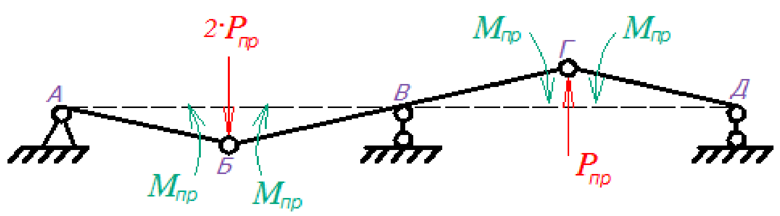
2) $n = 1$ => 2 шарнира в точках Б, В или Г. Возможные варианты возникновения пластических шарниров:



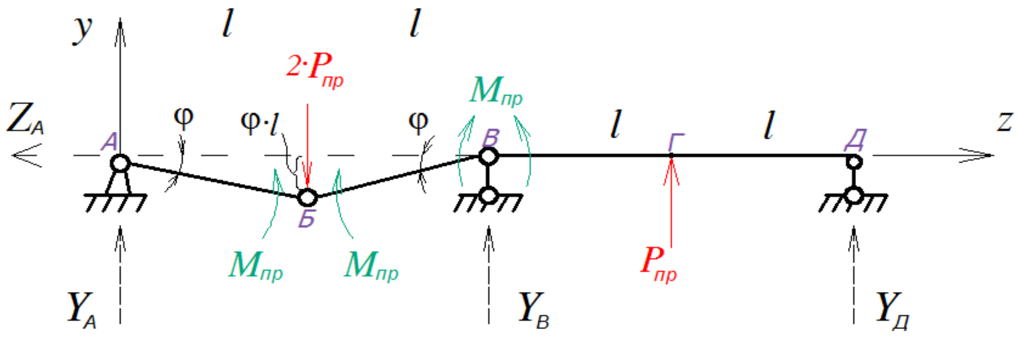
Точки Б и В



Точки В и Г



Точки Б и Г



$Z_A, Y_A, Y_В, Y_Д$ – реакции в опорах.

а) *Из уравнений равновесия*:

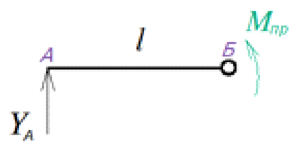
Для всей балки:

$$\sum M_A = 0 = -2 \cdot P_{пр} \cdot l + Y_В \cdot 2 \cdot l + P_{пр} \cdot 3 \cdot l + Y_Д \cdot 4 \cdot l \qquad (1)$$

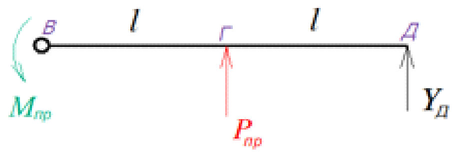
$$\sum F_y = 0 = Y_A - 2 \cdot P_{пр} + Y_В + P_{пр} + Y_Д \qquad (2)$$

$$\sum F_z = 0 = -Z_A \qquad (3)$$

Для крайних участков, опирающихся на шарниры:



$$\sum M_Б = 0 = M_{пр} - Y_A \cdot l \qquad (4)$$



$$\sum M_В = 0 = Y_Д \cdot 2 \cdot l + M_{пр} + P_{пр} \cdot l \qquad (5)$$

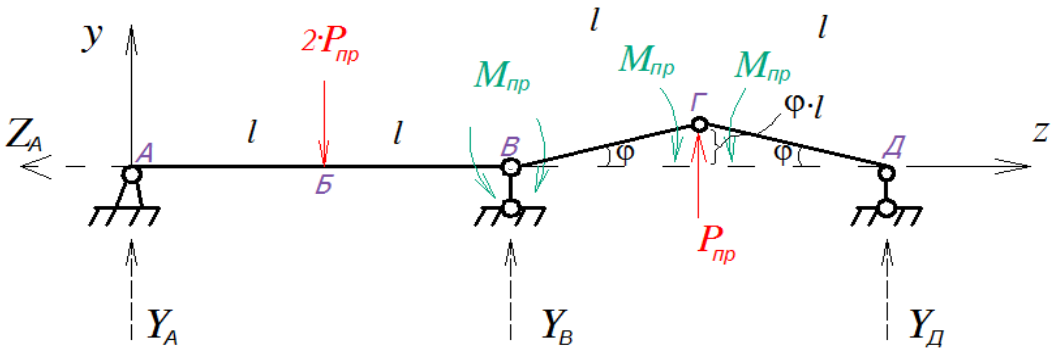
Решая совместно (1), (2), (3), (4) и (5), находим $Z_A, Y_A, Y_В, Y_Д$ и $P_{пр}$:

$$\boxed{P_{пр} = \frac{3}{2} \cdot \frac{M_{пр}}{l}}$$

б) *Принцип возможных перемещений*:

$$M_{пр}^{Б} \cdot \varphi + M_{пр}^{Б} \cdot \varphi + M_{пр}^{В} \cdot \varphi = 2 \cdot P_{пр} \cdot \varphi \cdot l$$

$$\boxed{P_{пр} = \frac{3}{2} \cdot \frac{M_{пр}}{l}}$$



а) *Из уравнений равновесия*:

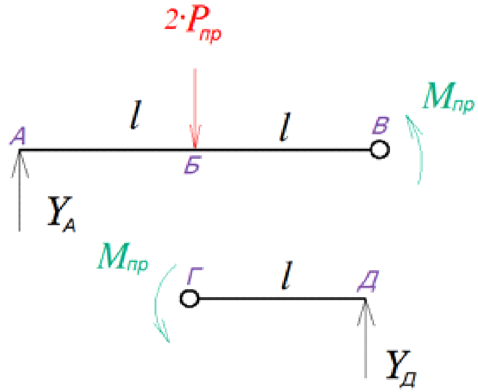
Для всей балки:

$$\sum M_A = 0 = -2\cdot P_{пр}\cdot l + Y_B\cdot 2\cdot l + P_{пр}\cdot 3\cdot l + Y_Д\cdot 4\cdot l \qquad (1)$$

$$\sum F_y = 0 = Y_A - 2\cdot P_{пр} + Y_B + P_{пр} + Y_Д \qquad (2)$$

$$\sum F_z = 0 = -Z_A \qquad (3)$$

Для крайних участков, опирающихся на шарниры:



$$\sum M_B = 0 = M_{пр} + 2\cdot P_{пр}\cdot l - Y_A\cdot 2\cdot l \qquad (4)$$

$$\sum M_Г = 0 = M_{пр} + Y_Д\cdot l \qquad (5)$$

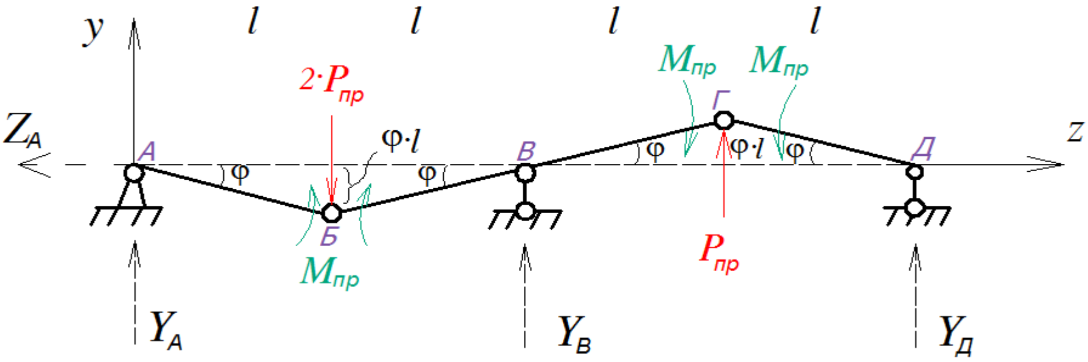
Решая совместно (1), (2), (3), (4) и (5), находим $Z_A, Y_A, Y_B, Y_Д$ и $P_{пр}$:

$$\boxed{P_{пр} = 3\cdot\frac{M_{пр}}{l}}$$

б) *Принцип возможных перемещений*:

$$M_{пр}^{B}\cdot\varphi + M_{пр}^{Г}\cdot\varphi + M_{пр}^{Г}\cdot\varphi = P_{пр}^{Г}\cdot\varphi\cdot l$$

$$\boxed{P_{пр} = 3\cdot\frac{M_{пр}}{l}}$$



а) *Из уравнений равновесия*:

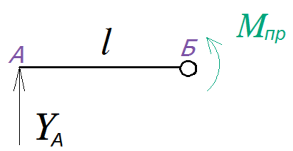
Для всей балки:

$$\sum M_A = 0 = -2\cdot P_{пр}\cdot l + Y_B\cdot 2\cdot l + P_{пр}\cdot 3\cdot l + Y_Д\cdot 4\cdot l \qquad (1)$$

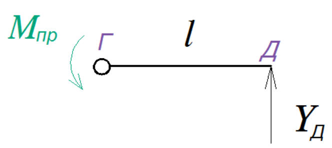
$$\sum F_y = 0 = Y_A - 2\cdot P_{пр} + Y_B + P_{пр} + Y_Д \qquad (2)$$

$$\sum F_z = 0 = -Z_A \qquad (3)$$

Для крайних участков, опирающихся на шарниры:



$$\sum M_Б = 0 = M_{пр} - Y_A\cdot l \qquad (4)$$



$$\sum M_Г = 0 = M_{пр} + Y_Д\cdot l \qquad (5)$$

Решая совместно (1), (2), (3), (4) и (5), находим $Z_A, Y_A, Y_B, Y_Д$ и $P_{пр}$:

$$\boxed{P_{пр} = \frac{4}{3}\cdot\frac{M_{пр}}{l}}$$

б) *Принцип возможных перемещений*:

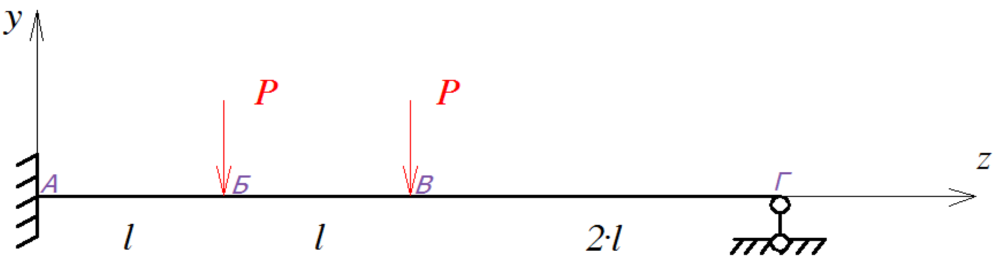
$$M_{пр}^{Б}\cdot\varphi + M_{пр}^{Б}\cdot\varphi + M_{пр}^{Г}\cdot\varphi + M_{пр}^{Г}\cdot\varphi = 2\cdot P_{пр}\cdot\varphi\cdot l + P_{пр}\cdot\varphi\cdot l$$

$$\boxed{P_{пр} = \frac{4}{3}\cdot\frac{M_{пр}}{l}}$$

3) Из всех возможных схем потери несущей способности на практике реализуется та, у которой предельная нагрузка наименьшая:

$$P_{пр} = \min\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{M_{пр}}{l},\ 3\cdot\frac{M_{пр}}{l},\ \frac{4}{3}\cdot\frac{M_{пр}}{l}\right) = \frac{4}{3}\cdot\frac{M_{пр}}{l}$$

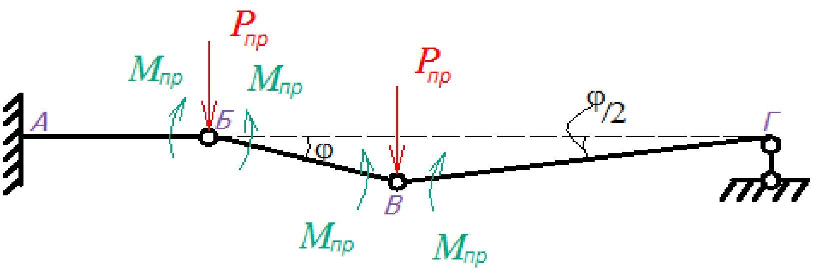
Пример $\boxed{VIII.2}$:



<u>*Решение*</u>

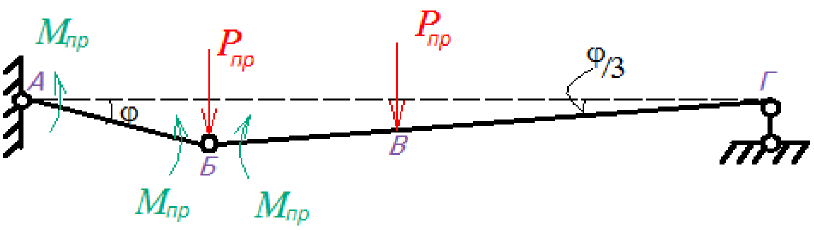
1) $\ldots M_{np} = \ldots.$

2) $n = 1$ => 2 шарнира в точках А, Б или В. Возможные варианты возникновения пластических шарниров:



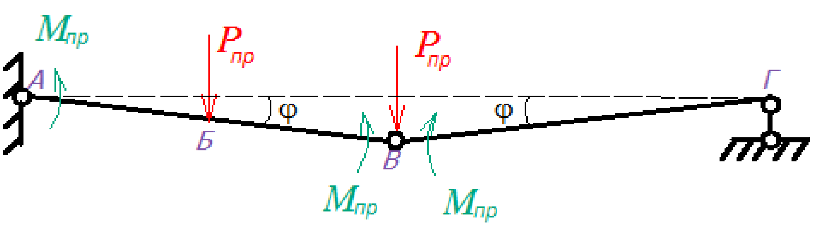
Точки Б и В

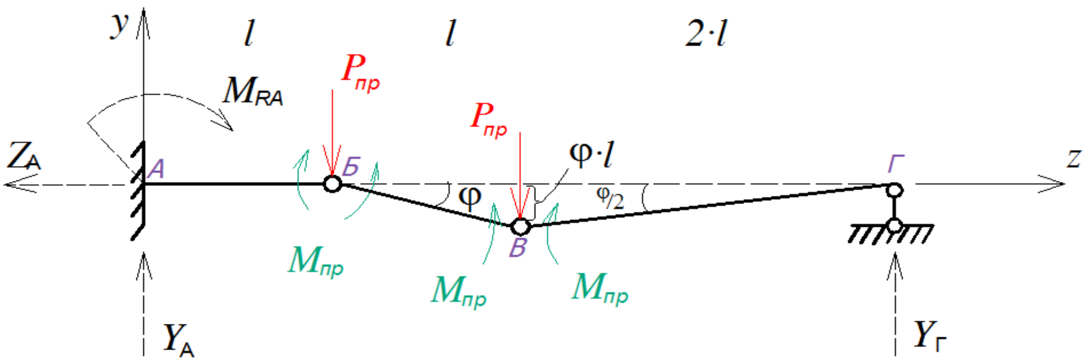
Схема неестественная (под силой в т. Б обратный прогиб), что приведёт к несовпадению результатов расчётов по уравнениям равновесия и по теореме Лагранжа.



Точки А и Б

Точки А и В





а) *Из уравнений равновесия*:

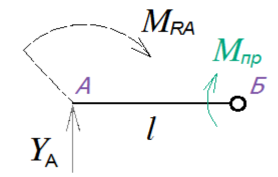
Для всей балки:

$$\sum M_A = 0 = -M_{RA} - P_{пр}\cdot l - P_{пр}\cdot 2\cdot l + Y_Г\cdot 4\cdot l \qquad (1)$$

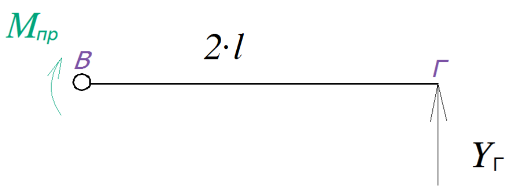
$$\sum M_Г = 0 = -M_{RA} + P_{пр}\cdot 3\cdot l + P_{пр}\cdot 2\cdot l - Y_A\cdot 4\cdot l \qquad (2)$$

$$\sum F_z = 0 = -Z_A \qquad (3)$$

Для крайних участков:



$$\sum M_Б = 0 = -M_{пр} - M_{RA} - Y_A\cdot l \qquad (4)$$



$$\sum M_В = 0 = -M_{пр} + Y_Г\cdot 2\cdot l \qquad (5)$$

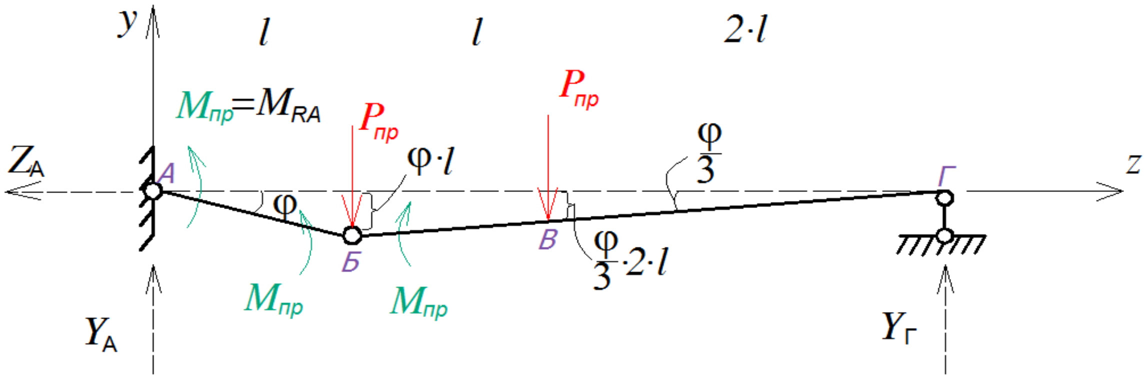
Решая совместно (1) … (5), находим Z_A, Y_A, M_{RA}, $Y_Г$ и $P_{пр}$:

$$\boxed{P_{пр} = \frac{2}{3}\cdot\frac{M_{пр}}{l}}$$

б) *Принцип возможных перемещений*:

$$M_{пр}^{Б}\cdot\varphi + M_{пр}^{В}\cdot\varphi + M_{пр}^{В}\cdot\frac{\varphi}{2} = P_{пр}\cdot\varphi\cdot l$$

$$\boxed{P_{пр} = \frac{5}{2}\cdot\frac{M_{пр}}{l}}$$



а) *Из уравнений равновесия*:

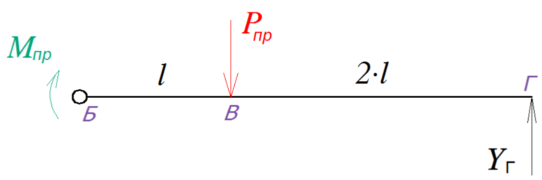
Для всей балки:

$$\sum M_A = 0 = M_{пр} - P_{пр} \cdot l - P_{пр} \cdot 2 \cdot l + Y_Г \cdot 4 \cdot l \qquad (1)$$

$$\sum F_y = 0 = Y_A - 2 \cdot P_{пр} + Y_Г \qquad (2)$$

$$\sum F_z = 0 = -Z_A \qquad (3)$$

Для крайних участков, опирающихся на шарниры:



$$\sum M_Б = 0 = -M_{пр} - P_{пр} \cdot l + Y_Г \cdot 3 \cdot l \qquad (4)$$

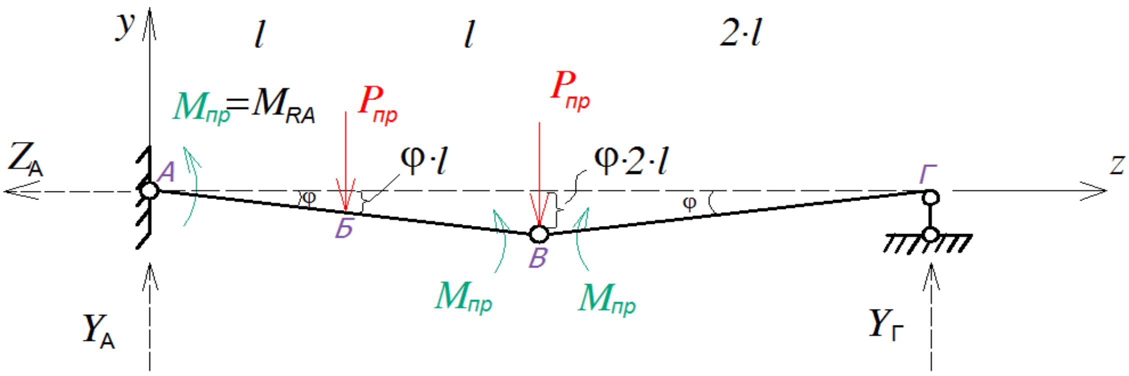
Решая совместно (1) … (4), находим Z_A, Y_A, $Y_Г$ и $P_{пр}$:

$$\boxed{P_{пр} = \frac{7}{5} \cdot \frac{M_{пр}}{l}}$$

б) *Принцип возможных перемещений*:

$$M_{пр}^{A} \cdot \varphi + M_{пр}^{Б} \cdot \varphi + M_{пр}^{Б} \cdot \frac{\varphi}{3} = P_{пр} \cdot \varphi \cdot l + P_{пр} \cdot \frac{\varphi}{3} \cdot 2 \cdot l$$

$$\boxed{P_{пр} = \frac{7}{5} \cdot \frac{M_{пр}}{l}}$$



а) *Из уравнений равновесия*:

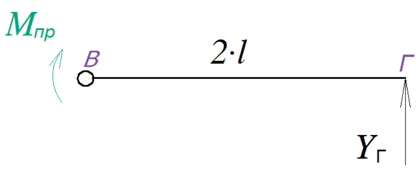
Для всей балки:

$$\sum M_A = 0 = M_{пр} - P_{пр}\cdot l - P_{пр}\cdot 2\cdot l + Y_Г \cdot 4\cdot l \qquad (1)$$

$$\sum F_y = 0 = Y_A - 2\cdot P_{пр} + Y_Г \qquad (2)$$

$$\sum F_z = 0 = -Z_A \qquad (3)$$

Для крайних участков, опирающихся на шарниры:



$$\sum M_B = 0 = -M_{пр} + Y_Г \cdot 2\cdot l \qquad (4)$$

Решая совместно (1) … (4), находим Z_A, Y_A, $Y_Г$ и $P_{пр}$:

$$\boxed{P_{пр} = \frac{M_{пр}}{l}}$$

б) *Принцип возможных перемещений*:

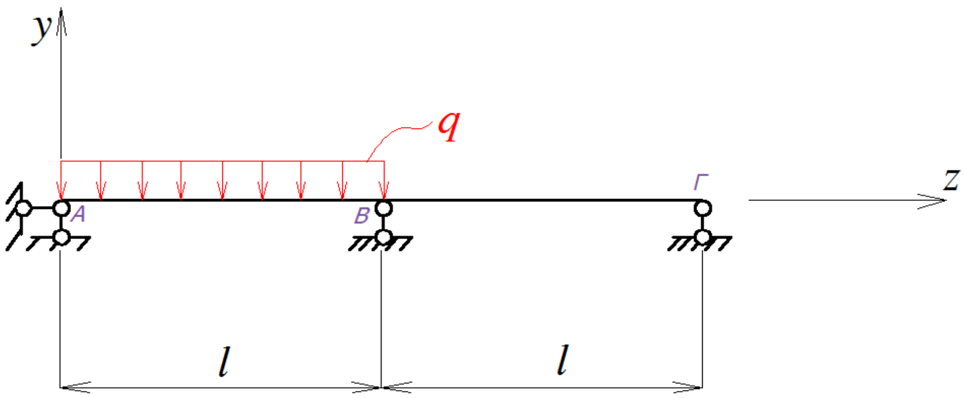
$$M^{A}_{пр}\cdot\varphi + M^{B}_{пр}\cdot\varphi + M^{B}_{пр}\cdot\varphi = P_{пр}\cdot\varphi\cdot l + P_{пр}\cdot\varphi\cdot 2\cdot l$$

$$\boxed{P_{пр} = \frac{M_{пр}}{l}}$$

3)

$$P_{\text{ï ð}} = \min\left(\frac{7}{5} \cdot \frac{M_{\text{ï ð}}}{l}, \quad \frac{M_{\text{ï ð}}}{l} \right) = \frac{M_{\text{ï ð}}}{l}$$

Пример $\boxed{VIII.3}$:

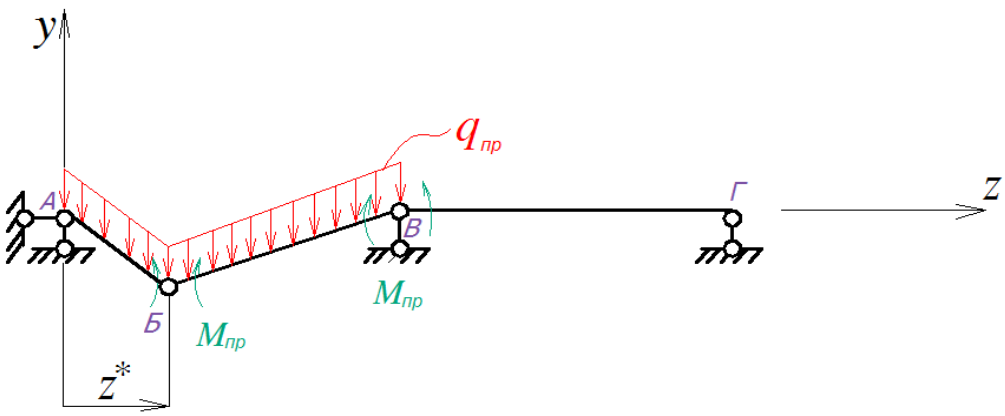


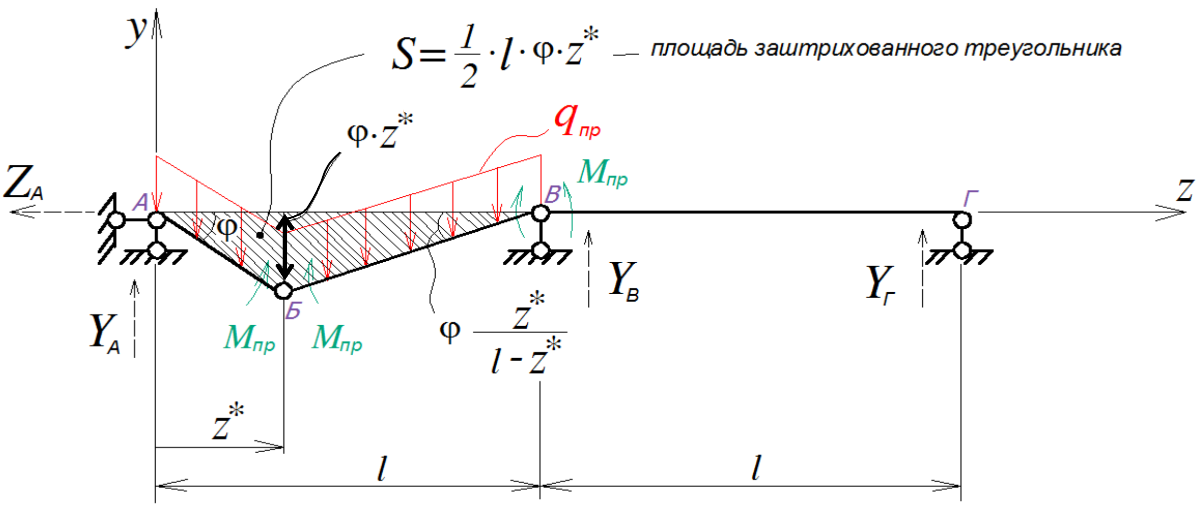
<u>*Решение*</u>

1) $\ldots M_{пр} = \ldots.$

2) $n = 1$ => 2 шарнира.

Единственный возможный вариант появления пластических шарниров в данном случае - т. В и т. Б под распределённой нагрузкой.





а) *Из уравнений равновесия*:

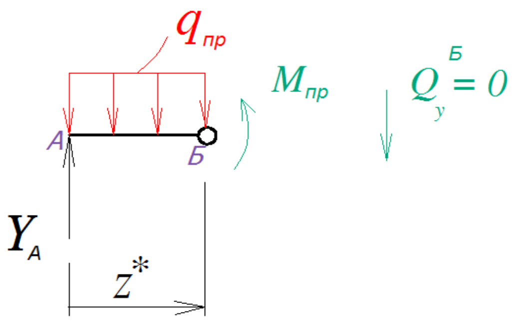
Для всей балки:

$$\sum M_{В} = 0 = -Y_A \cdot l + Y_Г \cdot l + \frac{q_{пр} \cdot l^2}{2} \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0 = Y_A + Y_B + Y_Г - q_{пр} \cdot l \quad (2)$$

$$\sum F_z = 0 = -Z_A \quad (3)$$

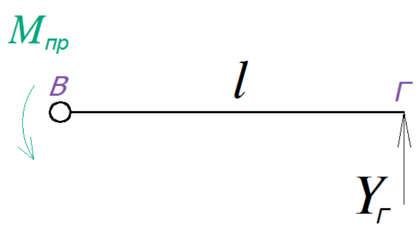
Для крайних участков, опирающихся на шарниры:



Перерезывающая сила Q_y в промежуточном пластическом шарнире равна нулю, т.к. образуется он в точке, где M_x принимает экстремальное значение, а его производная Q_y – нулевое.

$$\sum M_Б = 0 = M_{пр} - Y_A \cdot z^* + \frac{q_{пр} \cdot z^{*2}}{2} \quad (4)$$

$$\sum F_y = 0 = Y_A - q_{пр} \cdot z^* \quad (5)$$



$$\sum M_B = 0 = M_{ïð} + Y_{Ã} \cdot l \quad (6)$$

Решая совместно систему уравнений (1)…(6) находим Y_A, $Y_Г$, $Y_В$, Z_A, $q_{пр}$ и z^*:

$$\boxed{\begin{array}{l} z^* \approx 0,414 \cdot l \\ q_{пр} \approx 11,7 \cdot \dfrac{M_{пр}}{l^2} \end{array}}$$

б) *Принцип возможных перемещений*:

$$M_{пр}^{Б} \cdot \varphi + 2 \cdot M_{пр}^{Б,В} \cdot \varphi \cdot \frac{z^*}{l - z^*} = q_{пр} \cdot S = q_{пр} \cdot \frac{1}{2} \cdot l \cdot \varphi \cdot z^*$$

$$\Downarrow$$

$$q_{пр} = \frac{2 \cdot M_{пр}}{l} \cdot \left[\frac{l + z^*}{z^* \cdot (l - z^*)} \right] \qquad (\alpha)$$

Согласно кинематической теореме теории пластичности, действительной предельной нагрузкой будет минимальная из всех, определяемой формулой *(α)* Значит:

$$\frac{dq_{пр}}{dz^*} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$z^{*2} + 2 \cdot l \cdot z^* - l^2 = 0$$

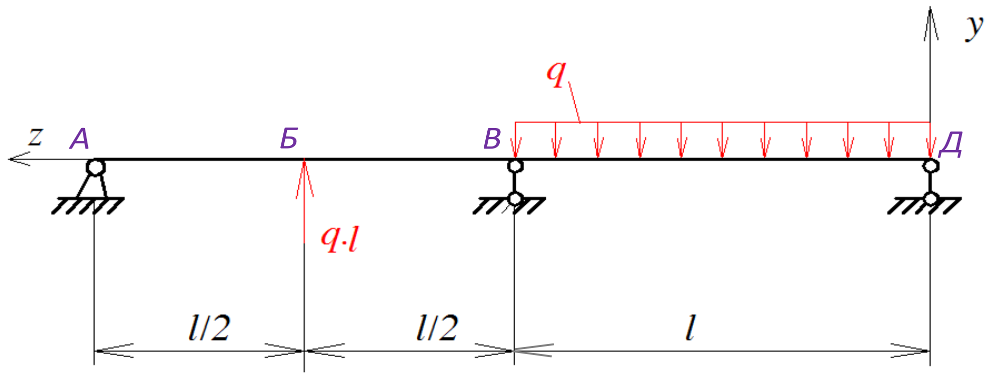
$$\Downarrow$$

$$z^* \approx 0,414 \cdot l$$

$$q_{пр} = \frac{2 \cdot M_{пр}}{l} \cdot l \cdot \left[\frac{1 + 0,414}{0,414 \cdot (1 - 0,414)} \right] \approx 11,657 \cdot \frac{M_{пр}}{l}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} z^* \approx 0,414 \cdot l \\ q_{пр} \approx 11,657 \cdot \dfrac{M_{пр}}{l^2} \end{array}}$$

Пример $\boxed{VIII.4}$ (только схемы образования пластических шарниров):



Решение

1) $\ldots M_{пр} = \ldots.$

2) $n = 1$ => 2 шарнира в точках Б, В и Г. Возможные варианты возникновения пластических шарниров: