IV

Геометрические характеристики плоских фигур.

Используемые в курсе «Сопротивление материалов» геометрические характеристики поперечных сечений стержней вычисляются по тем же формулам, что и инерциальные параметры тонких пластинок единичной плотности (1 кг/м^2).

Поэтому новых названий им придумывать не стали:

– центр тяжести;

– статический момент;

– момент инерции.

Перечень геометрических характеристик

Пусть на плоскости имеется некоторая геометрическая фигура Ф и некоторая система координат *OXY*:

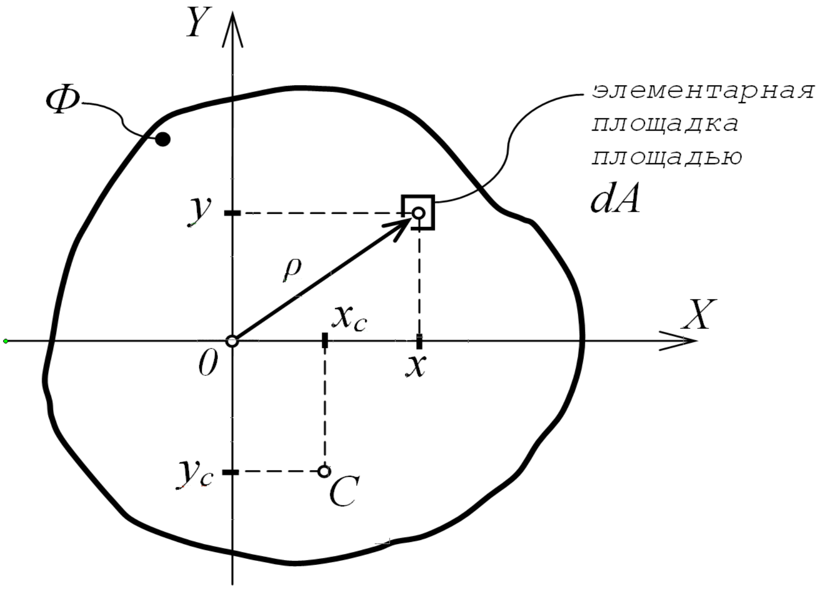


Рис. IV.1

C — ***центр тяжести*** фигуры (то же, что и центр тяжести пластинки подобной формы);

$$A = \int_{\Phi} dA$$ — ***площадь***, [м^2] ; (>0)

$$S_x = \int_{\Phi} y \cdot dA$$ — ***статический момент относительно оси X***, [м^3]; (>0, <0, =0)

$$S_y = \int_{\Phi} x \cdot dA$$ — ***статический момент относительно оси Y***, [м^3]; (>0, <0, =0)

$$I_x = \int_{\Phi} y^2 \cdot dA$$ — ***момент инерции относительно оси X***, [м^4]; (>0)

Осевые моменты инерции

$$I_y = \int_{\Phi} x^2 \cdot dA$$ — ***момент инерции относительно оси Y***, [м^4]; (>0)

$$I_{xy} = \int_{\Phi} x \cdot y \cdot dA$$ — ***центробежный момент инерции***, [м^4]; (>0, <0, =0)

$$I_p = \int_{\Phi} \rho^2 \cdot dA = \int_{\Phi} (x^2 + y^2) \cdot dA = I_y + I_x$$ — ***полярный момент инерции***, [м^4]. (>0)

Формулы для определения координат центра тяжести выведены ещё в курсе теоретической механики:

$$x_c = \frac{S_y}{A} \qquad (IV.2)$$

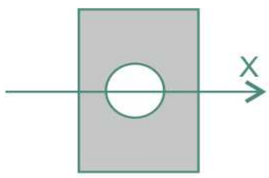
$$y_c = \frac{S_x}{A} \qquad (IV.3)$$

Как уже указывалось в разделе «кручение», моменты инерции - величины аддитивные:

а) Момент инерции сложной фигуры равен сумме моментов инерции её частей:

$$I = \sum I_i$$

б) Момент инерции фигуры равен моменту инерции её наружного контура, минус моменты инерции фигур-вырезов:



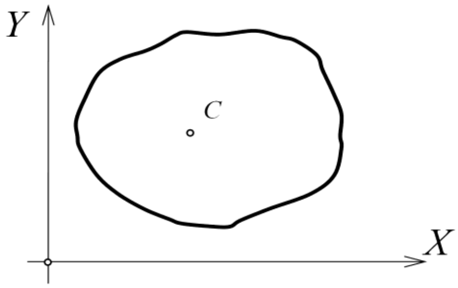
$$I_x = I_x^{\square} - I_x^{\circ}$$

Эти же два свойства также присущи статическим моментам.

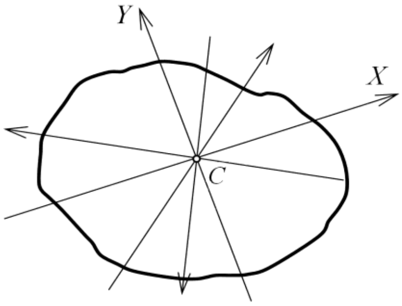
Виды координатных осей

Координатные оси OX и OY, в которых рассчитываются геометрические характеристики плоских фигур, подразделяются на:

1) ***Произвольные***: не обладают никакими признаками. Таких осей бесконечное количество.



2) ***Центральные***: начало координат - в центре тяжести фигуры. Таких осей также бесконечное количество.



Признак центральности осей X и Y:

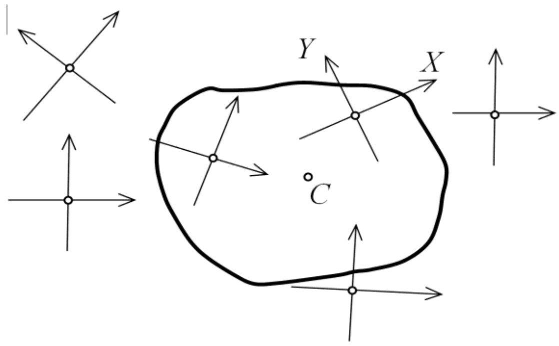
$$x_c = 0 \Rightarrow S_y = 0 \quad (\text{ см. } (IV.2))$$

$$y_c = 0 \Rightarrow S_x = 0 \quad (\text{ см. } (IV.3))$$

3) ***Главные***. Как известно, сумма осевых моментов инерции постоянна:

$$I_x + I_y = I_p = const$$

Значит, для каждой точки на плоскости имеется такая пара осей X и Y, в которой моменты I_x и I_y плоской фигуры принимают экстремальные значения (один максимальное, другой минимальное). Эти оси и называются *главными для соответствующей точки*.



Главных осей для фигуры существует бесконечное количество, ибо на плоскости бесконечное количество точек.

Признак главных осей:

$$I_x \begin{smallmatrix}\nearrow \min \\ \searrow \max\end{smallmatrix} \qquad I_y \begin{smallmatrix}\nearrow \max \\ \searrow \min\end{smallmatrix}$$

$I_{xy} = 0$ — это будет доказано позже.

4) Главные центральные: главные оси для точки - центра тяжести фигуры.

Для фигуры существует единственная пара главных центральных осей. Исключение – фигуры с тремя и более осями симметрии (ниже об этом будет подробнее).

Признаки:

$$I_x \begin{matrix} \nearrow \min \\ \searrow \max \end{matrix} \qquad I_y \begin{matrix} \nearrow \max \\ \searrow \min \end{matrix}$$

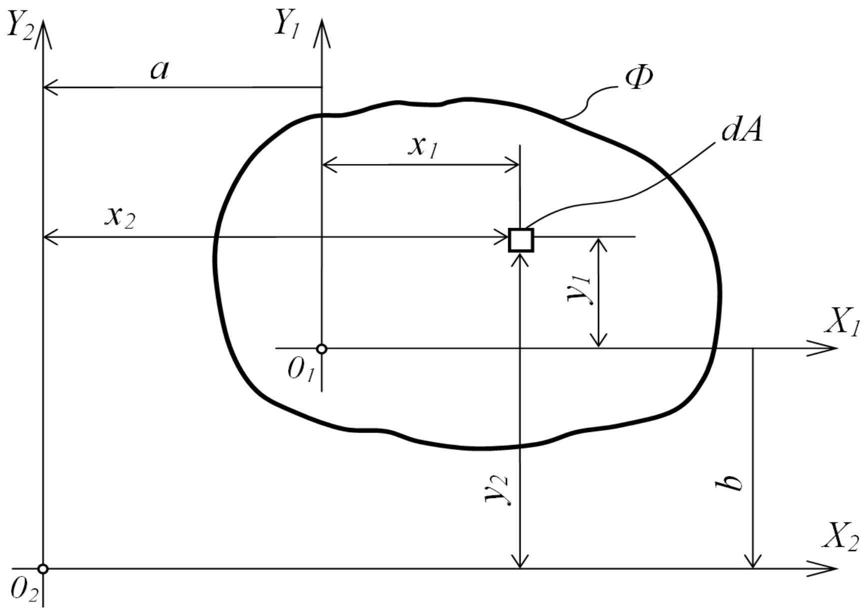
$$S_x = 0$$

$$S_y = 0$$

$$I_{xy} = 0$$

Если у фигуры есть ось симметрии, то она - главная центральная.

Изменение статических моментов при параллельном переносе осей



$O_2X_2 \parallel O_1X_1$

$O_2Y_2 \parallel O_1Y_1$

Известны: S_{x_1}, S_{y_1}

Найти: S_{x_2}, S_{y_2}

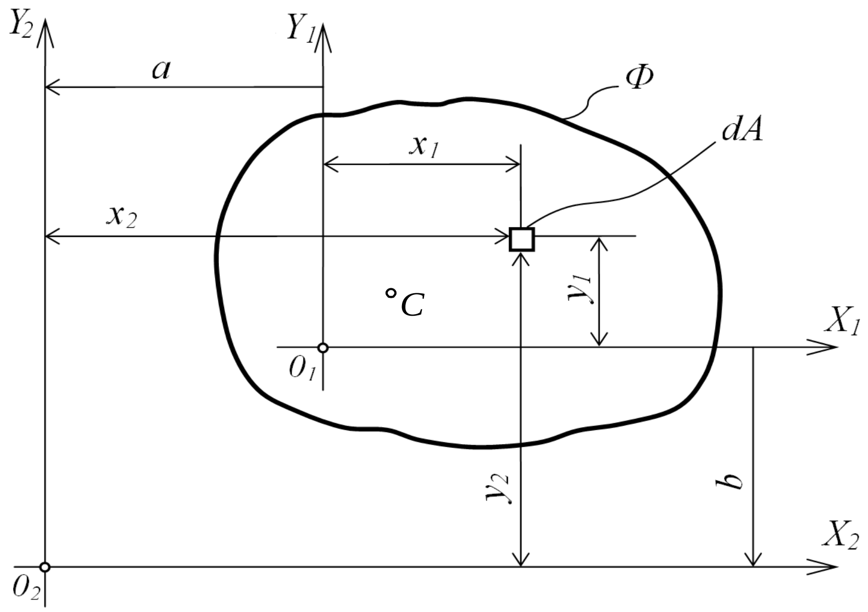
$$S_{x_2} = \int_{\Phi} y_2 \cdot dA = \int_{\Phi} (y_1 + b) \cdot dA = \int_{\Phi} y_1 \cdot dA + b \cdot \int_{\Phi} dA = S_{x_1} + b \cdot A$$

$$S_{y_2} = \int_{\Phi} x_2 \cdot dA = \int_{\Phi} (x_1 + a) \cdot dA = \int_{\Phi} x_1 \cdot dA + a \cdot \int_{\Phi} dA = S_{y_1} + a \cdot A$$

$$\boxed{\begin{aligned} S_{x_2} &= S_{x_1} + b \cdot A \\ S_{y_2} &= S_{y_1} + a \cdot A \end{aligned}} \qquad (IV.5)$$

a и *b* стоят в первой степени. Значит имеют значение их знаки (направление переноса осей)

Изменение моментов инерции при параллельном переносе осей



$$O_2X_2 \parallel O_1X_1$$

$$O_2Y_2 \parallel O_1Y_1$$

Известны: I_{x_1}, I_{y_1}

Найти: I_{x_2}, I_{y_2}

$$I_{x_2} = \int_{\Phi} y_2^2 \cdot dA = \int_{\Phi} \left(y_1 + b\right)^2 \cdot dA = \int_{\Phi} \left(y_1^2 + 2 \cdot b \cdot y_1 + b^2\right) \cdot dA =$$

$$= \int_{\Phi} y_1^2 \cdot dA + 2 \cdot b \cdot \int_{\Phi} y_1 \cdot dA + b^2 \int_{\Phi} dA = I_{x_1} + 2 \cdot b \cdot S_{x_1} + b^2 \cdot A \quad ;$$

$$I_{y_2} = \int_{\Phi} x_2^2 \cdot dA = \int_{\Phi} \left(x_1 + a\right)^2 \cdot dA = \int_{\Phi} \left(x_1^2 + 2 \cdot a \cdot x_1 + a^2\right) \cdot dA =$$

$$= \int_{\Phi} x_1^2 \cdot dA + 2 \cdot a \cdot \int_{\Phi} x_1 \cdot dA + a^2 \int_{\Phi} dA = I_{y_1} + 2 \cdot a \cdot S_{y_1} + a^2 \cdot A \quad .$$

$$\boxed{\begin{aligned} I_{x_2} &= I_{x_1} + 2 \cdot b \cdot S_{x_1} + b^2 \cdot A \\ I_{y_2} &= I_{y_1} + 2 \cdot a \cdot S_{y_1} + a^2 \cdot A \end{aligned}} \qquad (IV.5)$$

Знаки при *a* и *b* по-прежнему имеют значение.

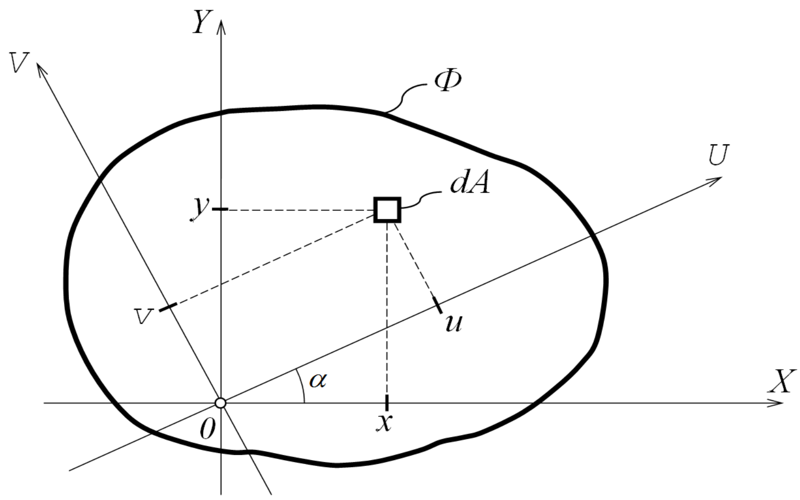
Если оси X_1 и Y_1 – центральные (т. O_1 = т. C), то статические моменты S_{x_1}, S_{y_1} равны нулю и:

$$\boxed{\begin{aligned} I_{x_2} &= I_{x_1} + b^2 \cdot A \\ I_{y_2} &= I_{y_1} + a^2 \cdot A \end{aligned}} \quad \text{– \textbf{\textit{теорема Штейнера}}} \qquad (IV.6)$$

Вот здесь уже знаки при a и b не важны. Из формул *(IV.6)* следует, что в семействе параллельных осей минимальный момент инерции получается относительно центральной оси ($a = 0$ или $b = 0$). Удаление рассматриваемой оси от центральной увеличивает момент инерции.

Теорема Штейнера для геометрических фигур (тонких пластинок) является аналогом теоремы Гюйгенса для массивных тел в Теоретической механике.

Изменение моментов инерции при повороте осей координат



$$u = x \cdot \cos\alpha + y \cdot \sin\alpha$$
$$v = -x \cdot \sin\alpha + y \cdot \cos\alpha$$

$$I_u = \int_A v^2 \cdot dA = \int_A \left(-x \cdot \sin\alpha + y \cdot \cos\alpha\right)^2 \cdot dA =$$

$$= \int_A \left(x^2 \cdot \sin^2\alpha - 2 \cdot x \cdot y \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha + y^2 \cdot \cos^2\alpha\right) \cdot dA =$$

$$= \sin^2\alpha \cdot \int_A x^2 \cdot dA - 2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha \cdot \int_A x \cdot y \cdot dA + \cos^2\alpha \cdot \int_A y^2 \cdot dA =$$

$$= I_y \cdot \sin^2\alpha - I_{xy} \cdot \underbrace{2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha}_{\sin 2\alpha} + I_x \cdot \cos^2\alpha \;;$$

$$I_v = \int_A u^2 \cdot dA = \int_A \left(x \cdot \cos\alpha + y \cdot \sin\alpha\right) \cdot dA =$$

$$= I_y \cdot \cos^2\alpha + I_{xy} \cdot \underbrace{2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha}_{\sin 2\alpha} + I_x \cdot \sin^2\alpha \;;$$

$$I_{uv} = \int_A u \cdot v \cdot dA = \int_A \left(x \cdot \cos\alpha + y \cdot \sin\alpha\right) \cdot \left(-x \cdot \sin\alpha + y \cdot \cos\alpha\right) \cdot dA =$$

$$= \int_A \left(-x^2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha + x \cdot y \cdot \cos^2\alpha - x \cdot y \cdot \sin^2\alpha + y^2 \cdot \cos\alpha \cdot \sin\alpha\right) \cdot dA =$$

$$= I_x \cdot \cos\alpha \cdot \sin\alpha - I_{xy} \cdot \sin^2\alpha + I_{xy} \cdot \cos^2\alpha - I_y \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha =$$

$$= \left| \begin{array}{l} 2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha = \sin 2\alpha \\ \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos 2\alpha \end{array} \right| = I_{xy} \cdot \cos(2 \cdot \alpha) + \frac{I_x - I_y}{2} \cdot \sin(2 \cdot \alpha)$$

Таким образом:

$$\boxed{\begin{aligned} I_u &= I_x \cdot \cos^2\alpha - I_{xy}\cdot\sin(2\cdot\alpha) + I_y\cdot\sin^2\alpha \\ I_v &= I_y \cdot \cos^2\alpha + I_{xy}\cdot\sin(2\cdot\alpha) + I_x\cdot\sin^2\alpha \\ I_{uv} &= I_{xy}\cdot\cos(2\cdot\alpha) + \frac{I_x - I_y}{2}\cdot\sin(2\cdot\alpha) \end{aligned}} \qquad (IV.7)$$

Найдём экстремум функции I_u, то есть найдём такой угол α, при котором I_u достигает своего максимума или минимума:

$$I_u = I_x \cdot \cos^2\alpha - I_{xy}\cdot\sin(2\cdot\alpha) + I_y\cdot\sin^2\alpha$$

$$\left(f^n\right)' = n\cdot f^{n-1}\cdot f'$$

$$I_u' = \frac{dI_u}{d\alpha} = 2\cdot\cos\alpha\cdot(-\sin\alpha)\cdot I_x - 2\cdot\cos(2\cdot\alpha)\cdot I_{xy} + 2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot I_y =$$

$$= -\sin(2\cdot\alpha)\cdot I_x - 2\cdot\cos(2\cdot\alpha)\cdot I_{xy} + \sin(2\cdot\alpha)\cdot I_y$$

Экстремум:

$$\alpha = \alpha_0,\ \ I_u' = 0: \quad \sin(2\cdot\alpha_0)\cdot\left[I_y - I_x\right] - 2\cdot\cos(2\cdot\alpha_0)\cdot I_{xy} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\sin(2\cdot\alpha_0)\cdot\left[I_y - I_x\right] = 2\cdot\cos(2\cdot\alpha_0)\cdot I_{xy}$$

$$\Downarrow$$

$$tg(2\cdot\alpha_0) = \frac{2\cdot I_{xy}}{I_y - I_x}$$

Так как $I_u + I_v = I_P = const$, то I_v при угле α_0 так же примет экстремальное значение: $(I_u = \max,\ I_v = \min)$ или $(I_u = \min,\ I_v = \max)$.

Найдем угол $\tilde{\alpha}$, при котором центробежный момент I_{uv} обращается в ноль:

$$I_{uv}(\tilde{\alpha}) = 0 = I_{xy} \cdot \cos(2 \cdot \tilde{\alpha}) + \frac{I_x - I_y}{2} \cdot \sin(2 \cdot \tilde{\alpha})$$

$$I_{xy} \cdot \cos(2 \cdot \tilde{\alpha}) = \frac{I_y - I_x}{2} \cdot \sin(2 \cdot \tilde{\alpha})$$

$$tg(2 \cdot \tilde{\alpha}) = \frac{2 \cdot I_{xy}}{I_y - I_x}$$

Это тот же самый угол, при котором моменты инерции I_u и I_v принимают экстремальные значения!

Значит, для точки *O* на плоскости существует только одна пара координатных осей, относительно которых моменты инерции фигуры принимают экстремальные значения, а центробежный момент обращается в ноль. Эти оси называются ***главными***.

Если в точке плоскости задана некоторая система координат *OXY* и в ней подсчитаны моменты инерции фигуры I_x, I_y, I_{xy}, то угол α_0 между этой системой координат и главными осями вычисляется по формуле:

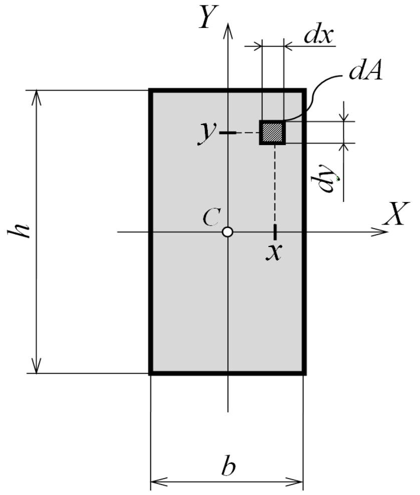
$$\boxed{tg(2 \cdot \alpha_0) = \frac{2 \cdot I_{xy}}{I_y - I_x}} \qquad (IV.8)$$

Какие именно экстремальные значения принимают моменты инерции в главных осях, можно определить, вычислив α_o из *(IV.8)* и подставив его в *(IV.7)*:

$$\boxed{I_{\substack{\max \\ \min}} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}} \qquad (IV.9)$$

Моменты инерции простейших фигур

1) *Прямоугольник:*



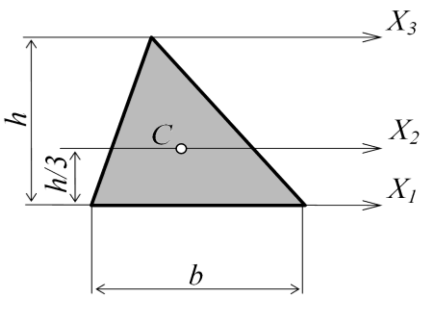
$$I_x = \int_{\Phi} y^2 \cdot dA = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} y^2 \cdot dx \cdot dy =$$

$$= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 \cdot \left(\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dx \right) \cdot dy = b \cdot \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 \cdot dy =$$

$$= b \cdot \frac{y^3}{3} \Bigg|_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = \frac{b}{3} \cdot \left[\left(\frac{h}{2}\right)^3 + \left(\frac{h}{2}\right)^3 \right] = \frac{b \cdot h^3}{12}$$

2) *Треугольник:*

Без вывода:

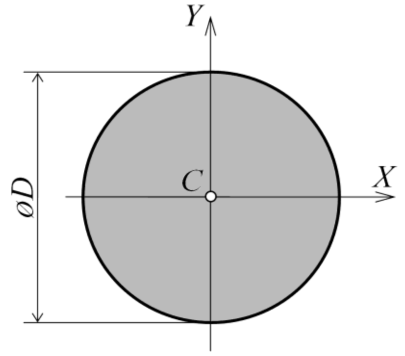


$$I_{x_3} = \frac{b \cdot h^3}{4}$$

$$I_{x_2} = \frac{b \cdot h^3}{36}$$

$$I_{x_1} = \frac{b \cdot h^3}{12}$$

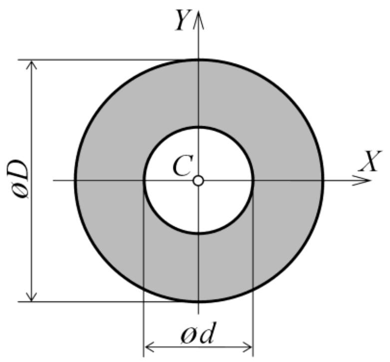
3) *Круг:*



$$I_p = \frac{\pi \cdot D^4}{32}$$ – было выведено ранее;

$$\left.\begin{matrix} I_x = I_y \\ I_x + I_y = I_p \end{matrix}\right\} I_x = I_y = \frac{1}{2} \cdot I_p = \frac{\pi \cdot D^4}{64}$$

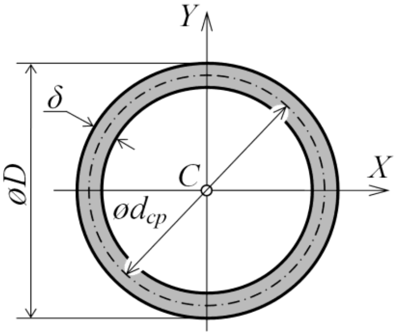
4) *Круг с вырезом:*



$$I_p = \frac{\pi \cdot D^4}{32} \cdot \left[1 - \left(\frac{d}{D}\right)^4\right]$$ – было выведено ранее;

$$I_x = I_y = \frac{1}{2} \cdot I_p = \frac{\pi \cdot D^4}{64} \cdot \left[1 - \left(\frac{d}{D}\right)^4\right]$$

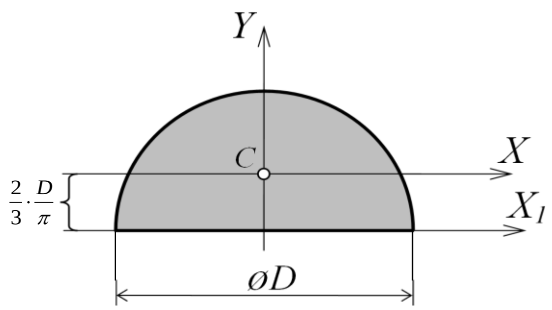
4) *Кольцо:*



$$I_p = \frac{\pi \cdot d_{cp}^3 \cdot \delta}{4}$$ – было выведено ранее;

$$I_x = I_y = \frac{1}{2} \cdot I_p = \frac{\pi \cdot d_{cp}^3 \cdot \delta}{8}$$

5) *Полукруг:*



$$A = \frac{1}{2} \cdot A^{\bigcirc} = \frac{\pi \cdot D^2}{8}$$

$$I_y = \frac{1}{2} \cdot I_y^{\bigcirc} = \frac{\pi \cdot D^4}{128}$$

Без вывода:

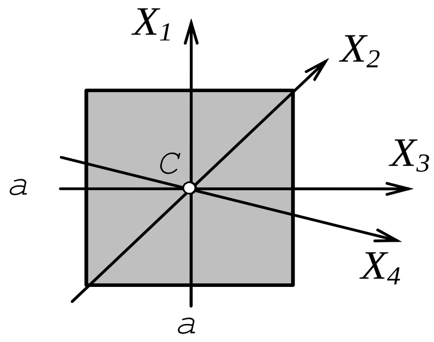
$$y_c = \frac{2}{3} \cdot \frac{D}{\pi}$$

$$I_{x_1} = \frac{\pi \cdot D^4}{128}$$

$$I_x \approx 0{,}00686 \cdot D^4$$

П р и м е ч а н и е:

У фигур, имеющих три и более оси симметрии, любая центральная ось является главной центральной, а осевые моменты инерции равны друг другу.

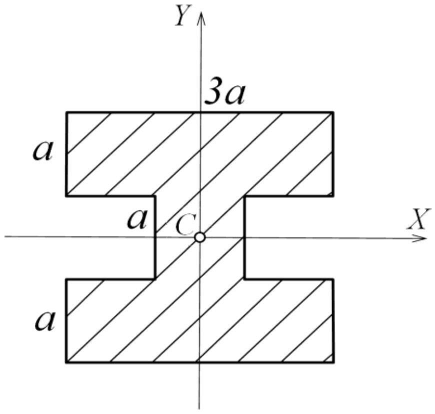


Квадрат:

$$I_{X_1} = I_{X_2} = I_{X_3} = I_{X_4} = \frac{a^4}{12}$$

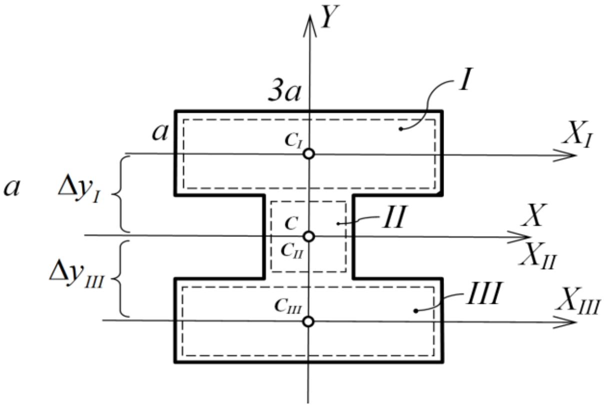
Оси X_1, X_2, X_3 и X_4 – главные центральные.

Пример вычисления момента инерции составной фигуры:



2 способа:

Разбить сложную фигуру на простые и суммировать их моменты инерции:



$$I_x^I = I_{x_I}^I + A^I \cdot \left(\Delta y_I\right)^2 =$$

$$= \frac{3 \cdot a \cdot a^3}{12} + 3 \cdot a^2 \cdot a^2 = \frac{39}{12} a^4$$

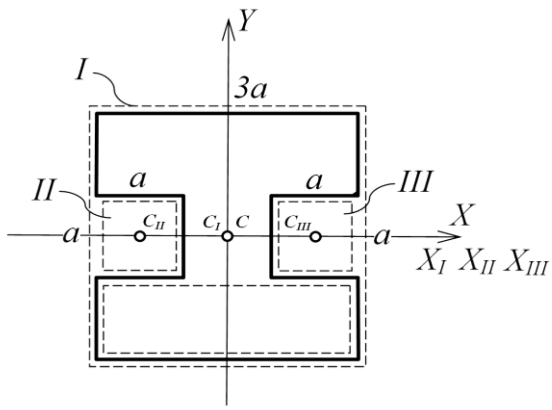
$$I_x^{II} = \frac{a \cdot a^3}{12} = \frac{a^4}{12}$$

$$I_x^{III} = I_{x_{II}}^{III} + A^{III} \cdot \left(\Delta y_{III}\right)^2 = \frac{39}{12} a^4$$

$$I_x = I_x^I + I_x^{II} + I_x^{III} =$$

$$= \frac{39}{12} a^4 + \frac{1}{12} a^4 + \frac{39}{12} a^4 = \frac{79}{12} a^4$$

Из момента инерции сплошной фигуры вычесть моменты инерции вырезов:



$$I_x^I = \frac{3 \cdot a \cdot \left(3 \cdot a\right)^3}{12} = \frac{81}{12} a^4$$

$$I_x^{II} = I_x^{III} = \frac{a \cdot a^3}{12} = \frac{a^4}{12}$$

$$I_x = I_x^I - I_x^{II} - I_x^{III} =$$

$$= \frac{81}{12} a^4 - \frac{1}{12} a^4 - \frac{1}{12} a^4 = \frac{79}{12} a^4$$