III

К р у ч е н и е

Крутящим называют момент, вектор которого направлен вдоль оси стержня.

Кручением называется такой вид нагружения стержня, при котором из всех шести внутренних силовых факторов в его поперечных сечениях (*рис. I.6.*) не равен нулю *только* крутящий момент $M_{кр}$:

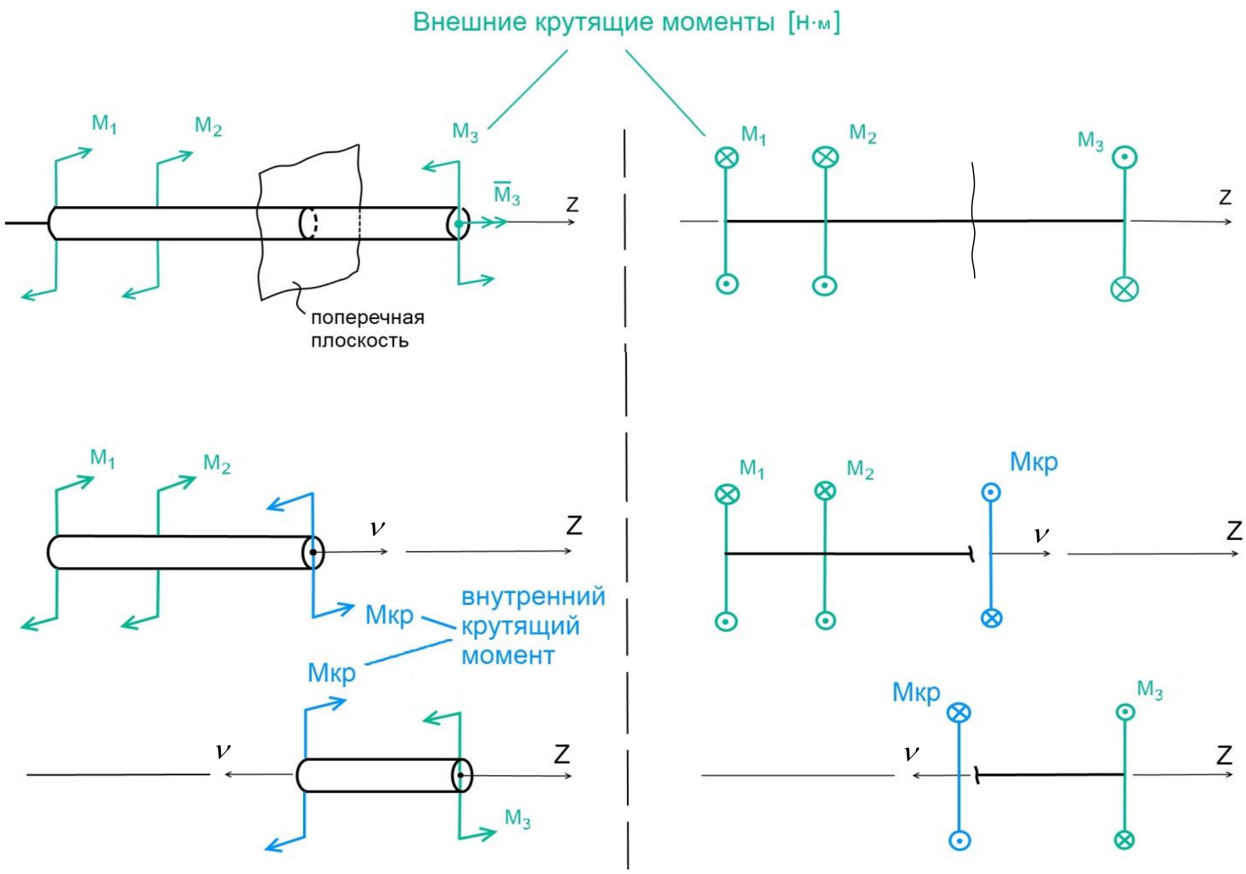


Рис. III.1.

Положительное направление $M_{кр}$ — вращение против часовой стрелки относительно нормали ν к поперечному сечению.

Длину оси стержня кручение не изменяет.

Примечание: Внешний крутящий момент также называют «скручивающим моментом», а внутренний крутящий момент – просто «крутящим моментом».

Касательное напряжение τ в различных точках поперечного сечения скручиваемого стержня различается по величине и по направлению. Разрушение стержня начинается там, где оно максимально.

Коэффициент пропорциональности между максимальным напряжением τ_{max} в поперечном сечении и действующим в этом сечении внутренним крутящим моментом $M_{кр}$ называется ***моментом сопротивления при кручении*** поперечного сечения и обозначается $W_к$ [м^3]:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{кр}}{W_К} \qquad \text{«метро на метро»} \qquad (III.1)$$

Момент сопротивления при кручении определяется только формой и размерами сечения.

А н а л о г и и

Иногда разные по своей сути физические явления, математически описываются идентичными уравнениями.

Тогда удобно одно явление, менее понятное и менее удобное для изучения, исследовать на примере другого — более наглядного, именуемого ***аналогом***.

Сам процесс такого исследования именуется ***аналогией***.

1) Гидродинамическая аналогия:

Аналогом распределения касательных напряжений в поперечных сечениях простой формы является распределения скоростей частиц воды, закрученной в ёмкости такой же формы:

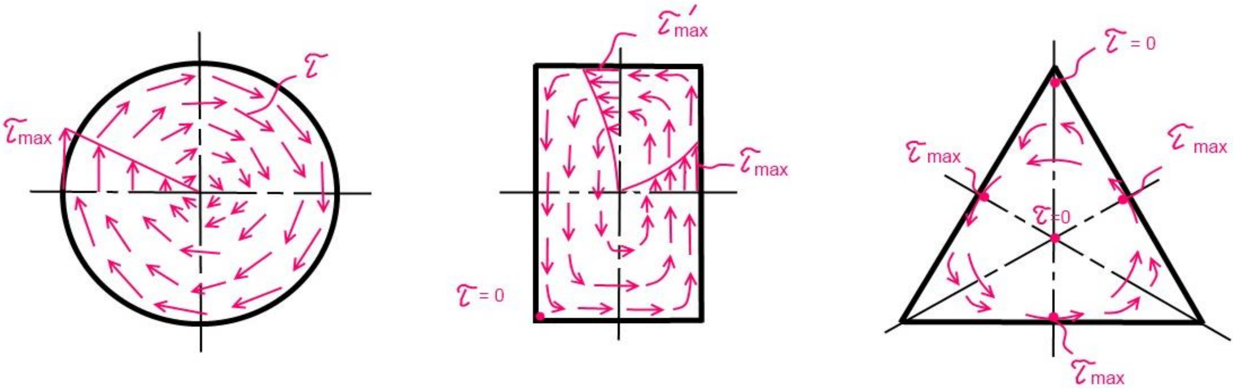


Рис. III.2.

2) Мембранная аналогия:

Применима к исследованию поперечных сечений любой формы.

В жёсткой плите вырезается отверстие, форма которого повторяет форму поперечного сечения стержня. Отверстие затягивается тонкой пленкой, под плиту подается избыточное давление, плёнка выпучивается.

Аналогом касательного напряжения в точке поперечного сечения является тангенс угла α, который составляет касательная к выпученной поверхности пленки в этой же точке:

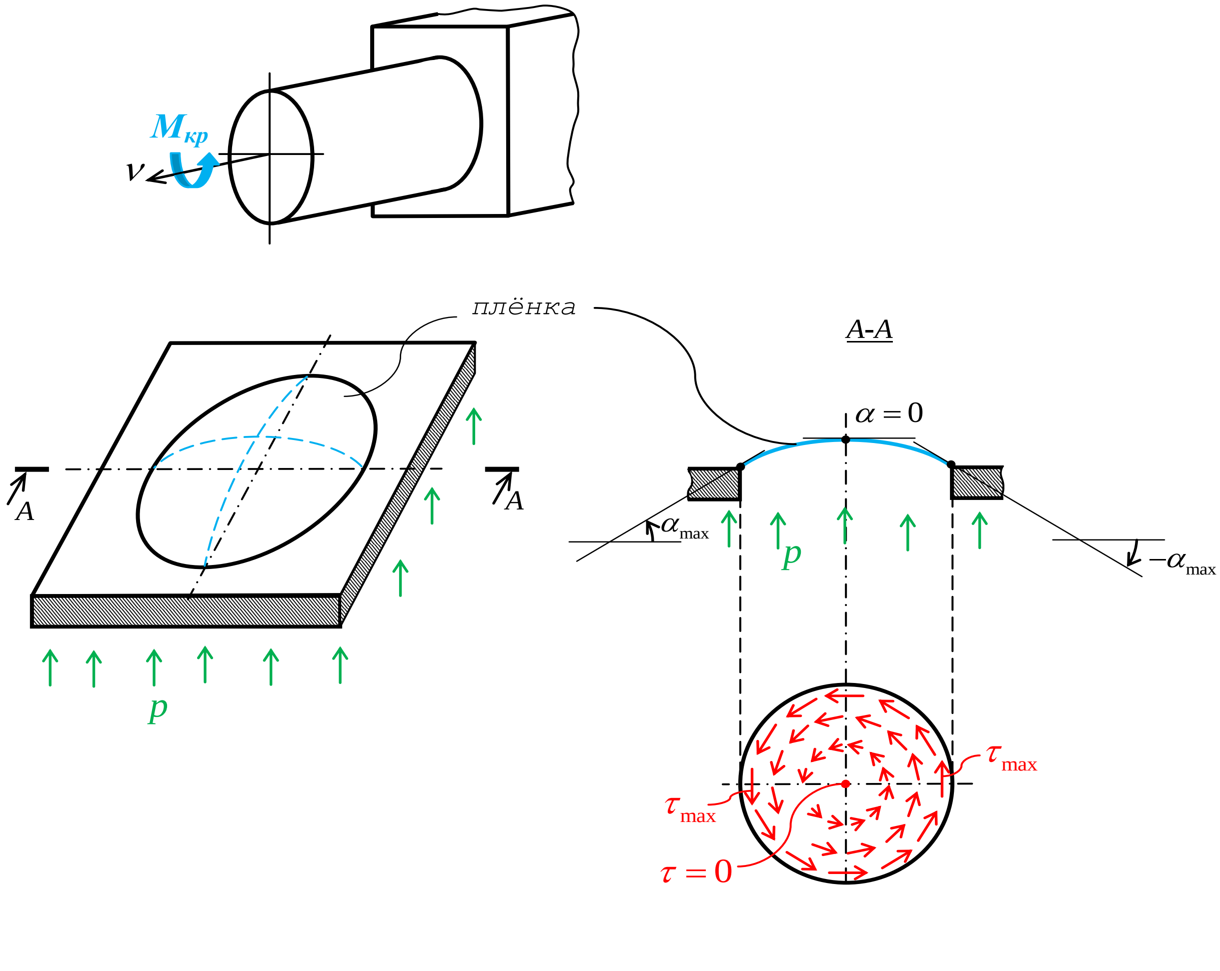


Рис. III.3.

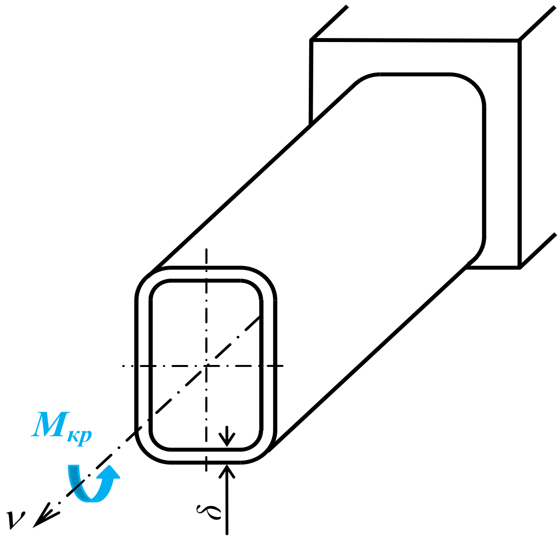
Углы выпучивания, как правило, небольшие (замеряются специальными устройствами), поэтому $tg\alpha \approx \alpha$.

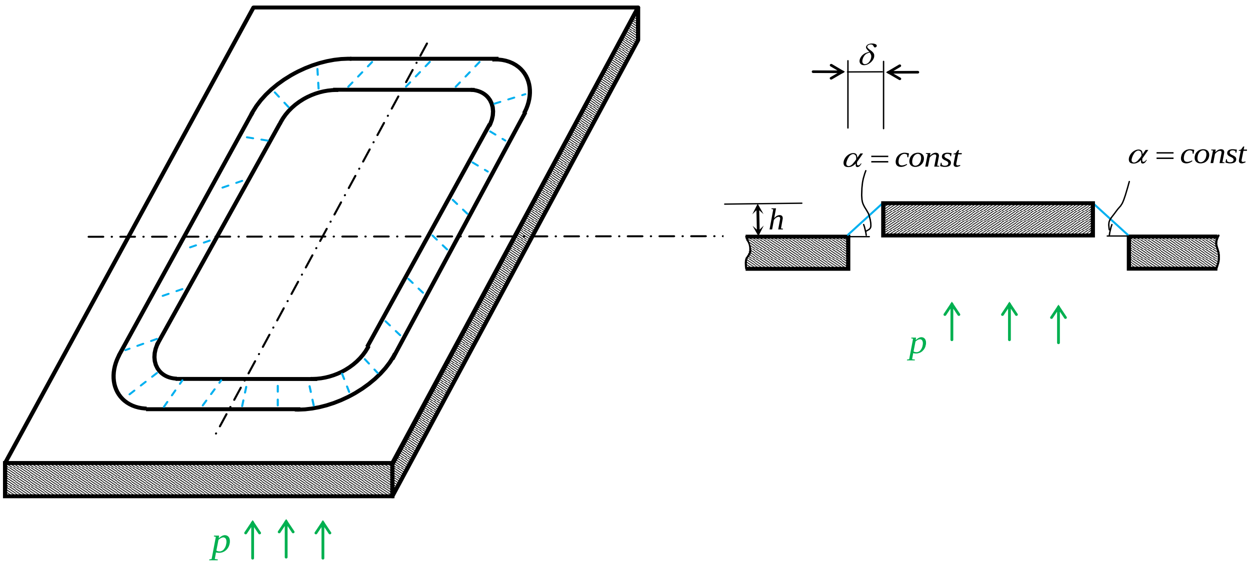
Замкнутый

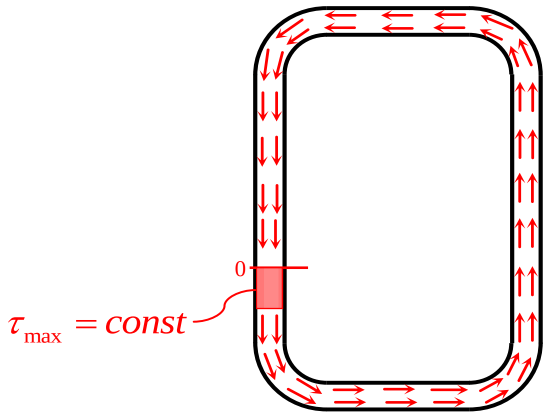
тонкостенны

профиль

Рис. III.4.





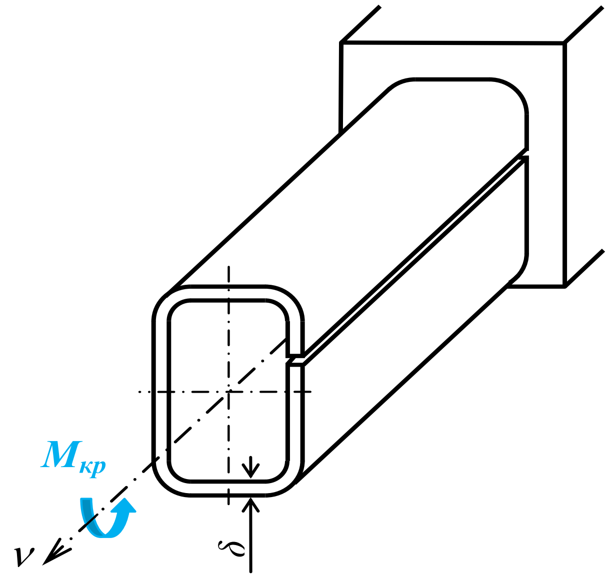


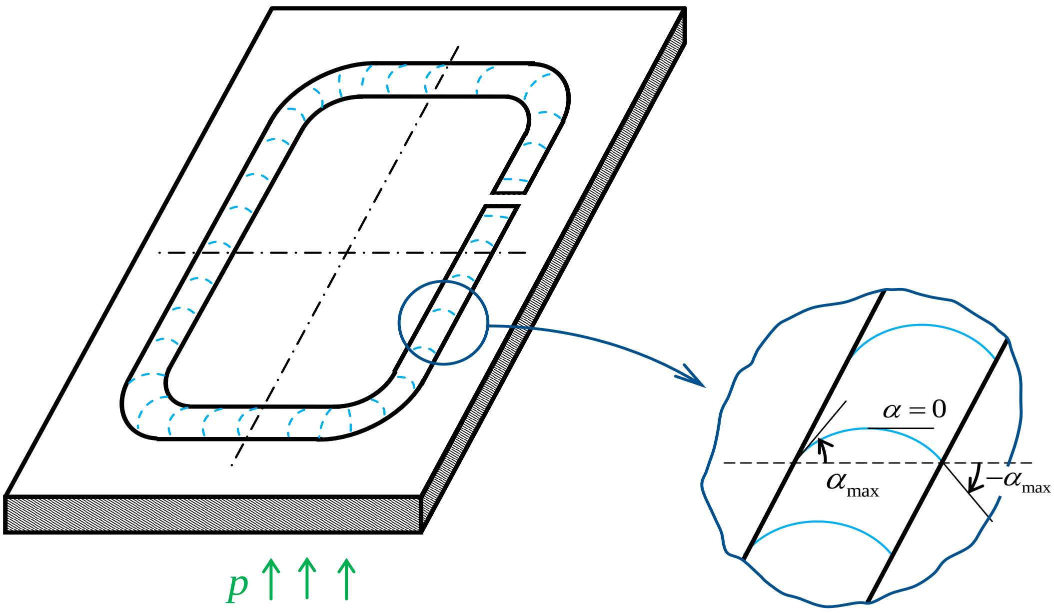
Незамкнутый

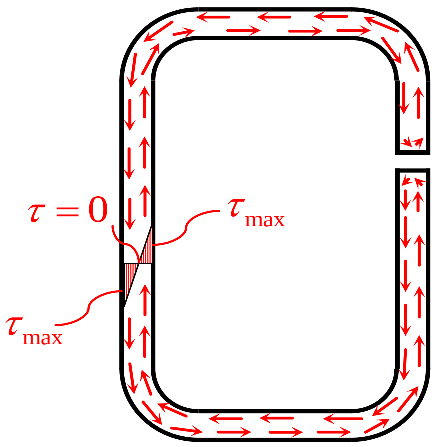
тонкостенны

профиль

Рис. III.5.







Незамкнутый

составной

тонкостенны

профиль

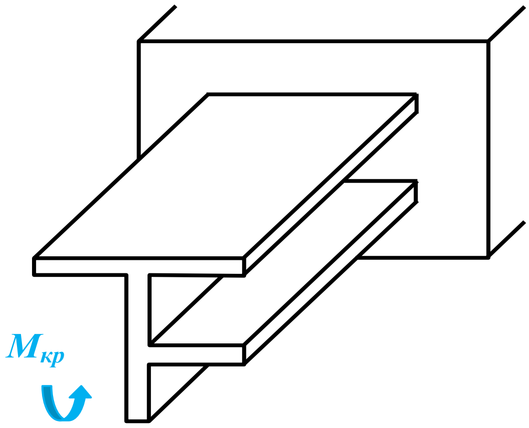
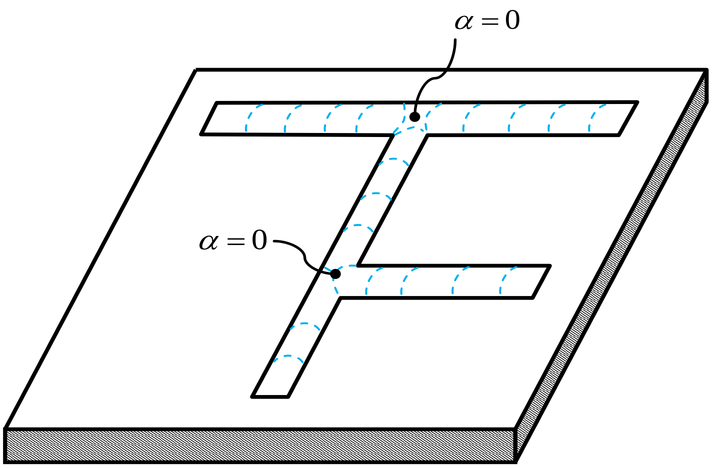
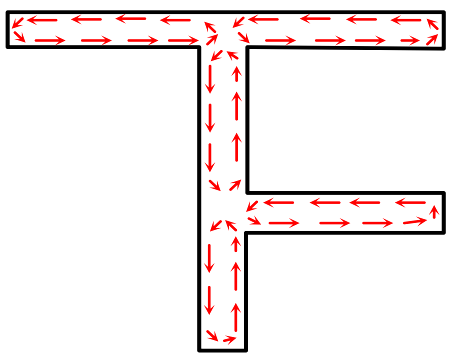


Рис. III.6.



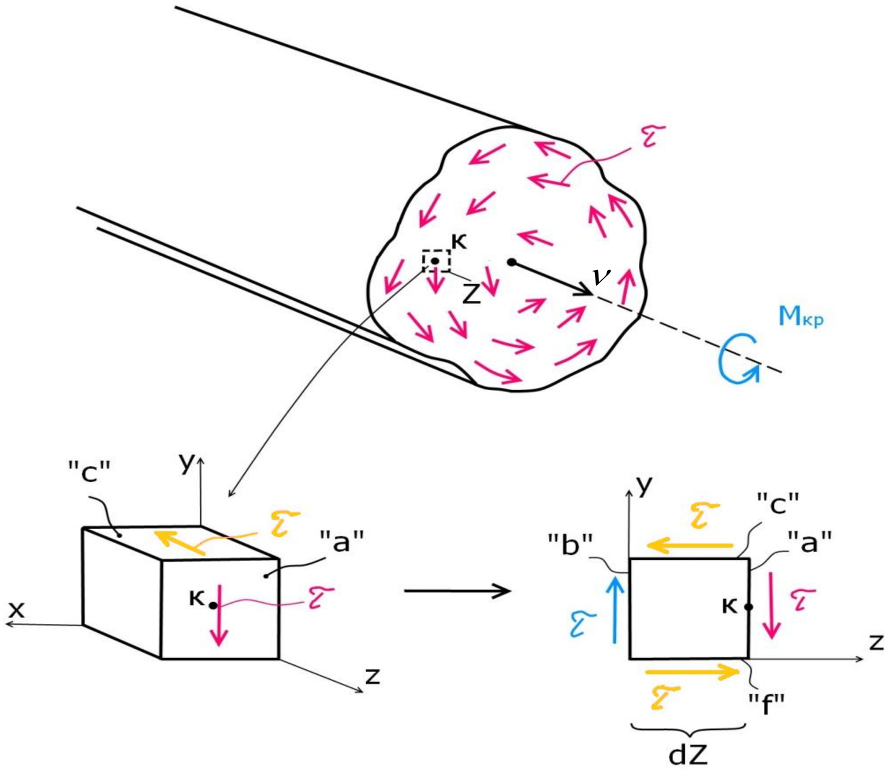


Чистый сдвиг

При кручении в поперечных сечениях стержня возникают только касательные напряжения.

В окрестности произвольной точки “*К*” поперечного сечения выделим элементарный объём (бесконечно малый параллелепипед), одна из граней которого принадлежит сечению:

Рис. III.7.



Уравнения равновесия элементарного объёма:

τ – *так как грань есть часть поперечного сечения*

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow \tau = \tau$

τ, τ *-пара сил*

$\Sigma M_x = 0 \Rightarrow \tau$

Грань *"b"* – часть соседнего поперечного сечения. Следовательно, на ней тоже действуют только касательные напряжения τ.

Закон парности касательных напряжений (общий для всех напряжённых состояний): на смежных взаимно перпендикулярных площадках касательные напряжения равны по модулю и противоположны по направлению.

Следствия из закона парности:

1) *В крайних точках поперечного сечения скручиваемого стержня касательные напряжения τ направлены вдоль линии края.*

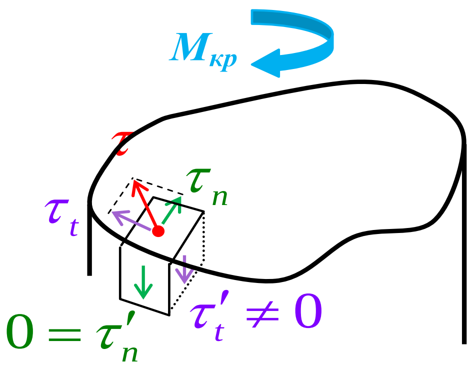


Рис. III.8

Доказываем от обратного (*рис. III.8.*). Пусть в крайней точке сечения касательное напряжение не параллельно контуру края. Тогда оно раскладывается на две составляющие: параллельную контуру τ_t и перпендикулярную ему τ_n. Парное τ_n напряжение τ_n' заведомо равно нулю, ибо наружная поверхность стержня свободна от такой нагрузки, значит и составляющая τ_n так же нулевая.

2) *В угловых точках поперечного сечения скручиваемого стержня касательные напряжения τ равны нулю.*

Доказываем аналогично (*рис. III.9.*): раскладываем произвольный вектор касательного напряжения на две составляющие, перпендикулярные сторонам угла и убеждаемся в том, что обе они нулевые.

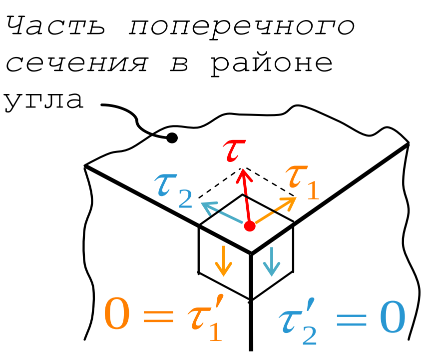


Рис. III.9.

Следствия 1) и 2) наглядно иллюстрируются гидродинамической аналогией (*рис. III.2.*).

3) *В продольных сечениях скручиваемого стержня так же возникают касательные напряжения, парные напряжениям в поперечных сечениях.*

Это видно уже из *рис. III.8.*: τ_t - напряжение в поперечном сечении, τ_t' - парное ему напряжение в сечении продольном. По этой причине, например, скручиваемые прямоугольные брусья из дерева лопаются вдоль середины бо́льшей стороны – там, где действуют наибольшие касательные напряжения (*рис. III.10.*).

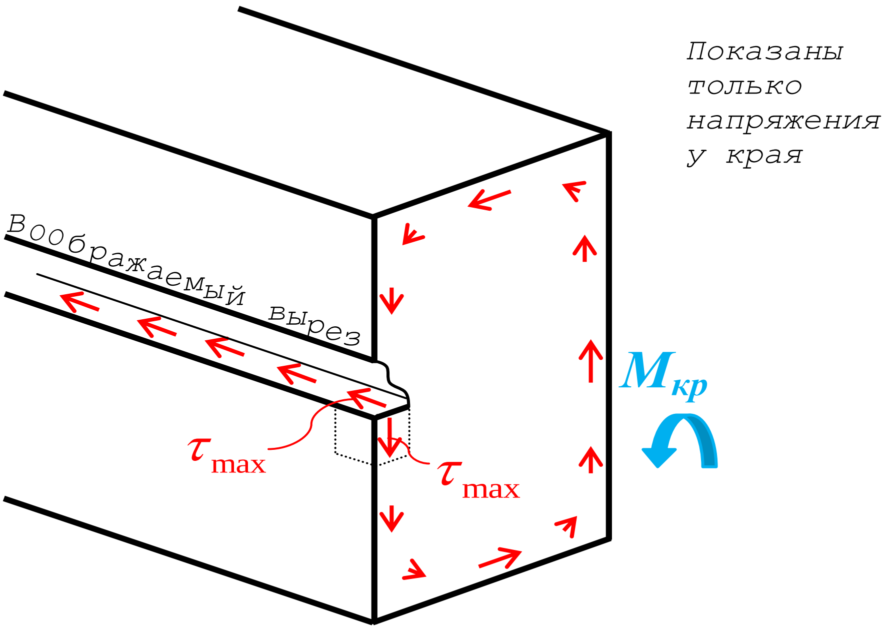


Рис. III.10.

Напряжённое состояние в точке тела называется ***чистым сдвигом***, если в её окрестности можно выделить элементарный объём, на четырёх гранях которого действуют только касательные напряжения:

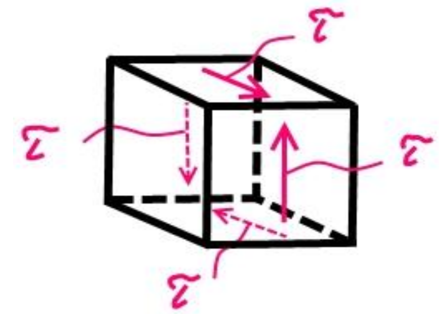


Рис. III.11.

Касательные напряжения не меняют длины рёбер элементарного объёма. Следовательно, объёмная деформация в точке при напряжённом состоянии (н.с.) «чистый сдвиг»:

$$e = 0$$

Напряжённое состояние «чистый сдвиг» реализуется не только в точках тела, работающего на кручение, но и в точках тела, работающего на срез:

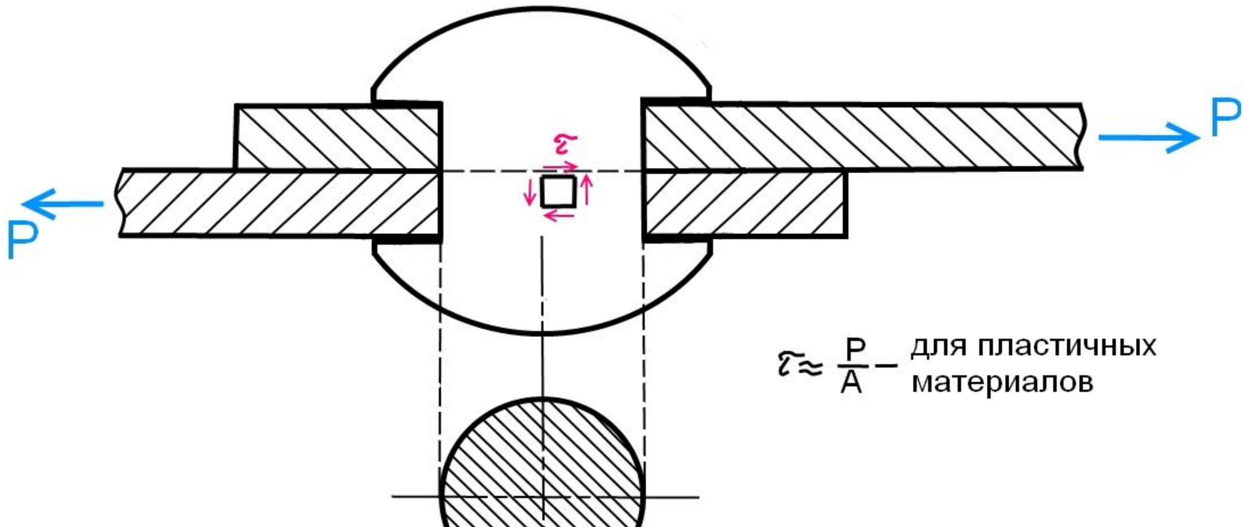
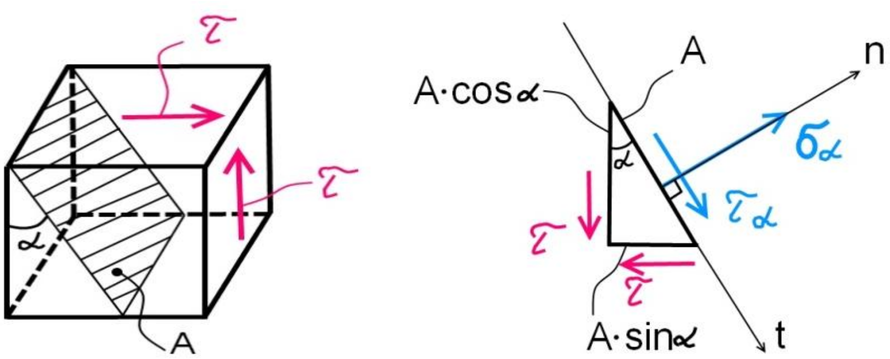


Рис. III.12.

Напряжения в наклонных площадках при чистом сдвиге:



Условия равновесия части элементарного объёма под наклонной площадкой:

$$\sum F_n = 0 = \sigma_\alpha \cdot A - (\tau \cdot A \cdot \cos \cdot \alpha) \cdot \sin \cdot \alpha - (\tau \cdot A \cdot \sin \cdot \alpha) \cdot \cos \cdot \alpha$$

$$\boxed{\sigma_\alpha = \tau \cdot \sin(2 \cdot \alpha)}$$

$$\sum F_t = 0 = \tau_\alpha \cdot A + (\tau \cdot A \cdot \cos \cdot \alpha) \cdot \cos \cdot \alpha - (\tau \cdot A \cdot \sin \cdot \alpha) \cdot \sin \cdot \alpha$$

$$\boxed{\tau_\alpha = \tau \cdot \cos(2 \cdot \alpha)}$$

В каких площадках нет касательных напряжений, действуют только нормальные?

$$\tau_\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos(2 \cdot \alpha) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2 \cdot \alpha = \pm 90° \quad \Rightarrow \quad \alpha = \pm 45°$$

при этом: $\sigma_\alpha = \sigma_{45°} = \tau \cdot \sin(\pm 2 \cdot 45°) = \pm\tau$.

Таким образом:

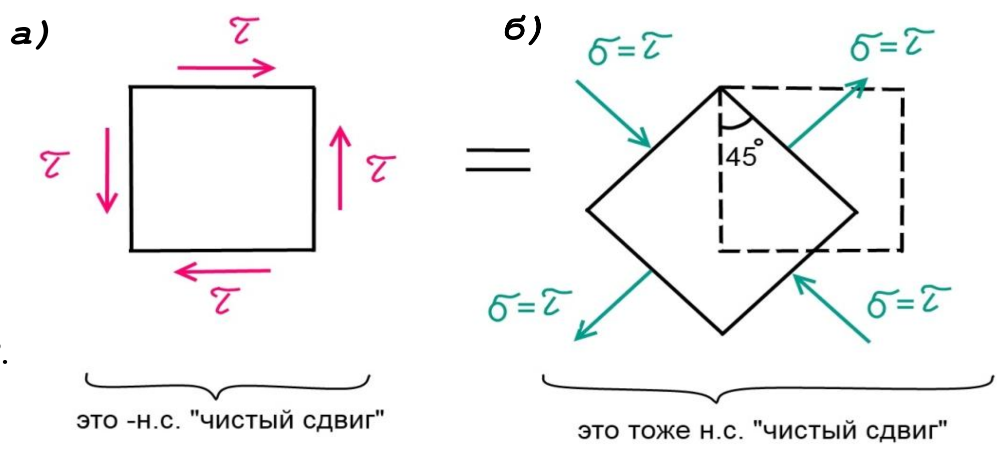


Рис. III.13.

Закон Гука для сдвига

Касательные напряжения τ искажают форму элементарного объёма, вызывая в нем угловые деформации γ:

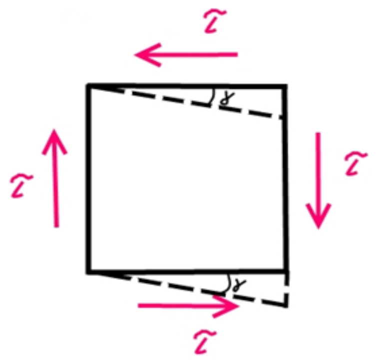


Рис. III.14.

Зависимость между τ и γ для упругого изотропного материала выражает ***закон Гука для сдвига***:

$$\boxed{\tau = G \cdot \gamma} \qquad (III.2)$$

где

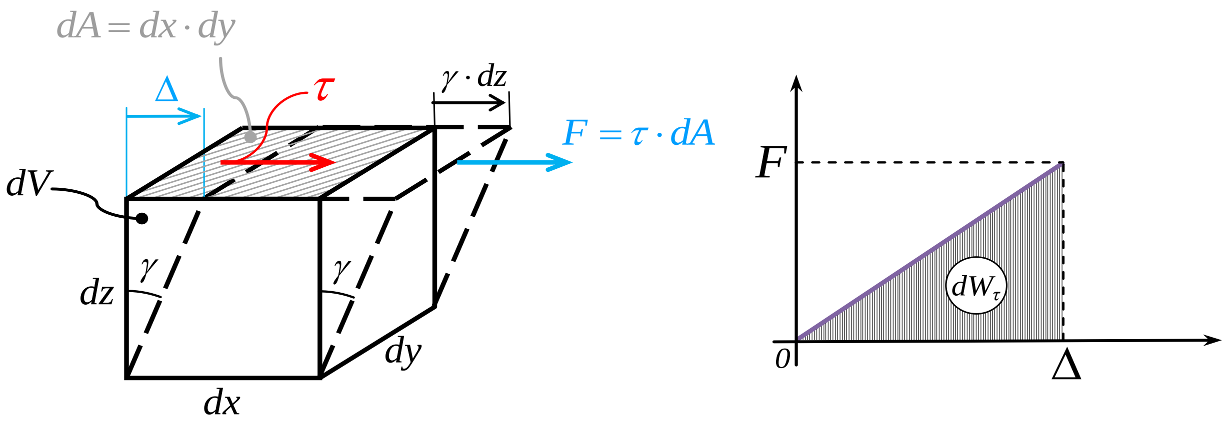
G — ***модуль упругости второго рода*** (модуль сдвига) — характеристика материала, определяемая экспериментально, [Па].

Так же, как при растяжении/сжатии, при сдвиге пластичный материал работает упруго, потом «течёт», потом упрочняется, потом разрушается. Хрупкий материал сохраняет упругость вплоть до разрушения.

Удельная потенциальная энергия при чистом сдвиге

Вспоминаем: потенциальная энергия *U*, накопленная в деформированном упругом теле, численно равна работе *W* внутренних сил на перемещениях точек тела при нагружении.

Рассмотрим рис. III.13а:



Потенциальная энергия элементарного объёма *dU* равна работе сил, действующих на его гранях (коэффициент ½ отражает пропорциональное возрастание сил и перемещений от нуля до конечных значений при нагружении, см. график):

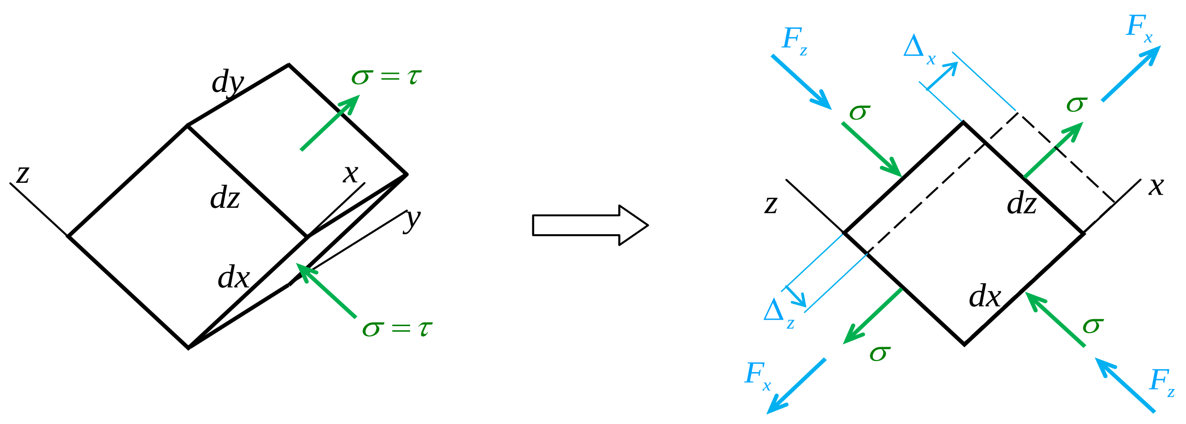
$$dU = dW_\tau = \frac{1}{2}\overbrace{(\tau \cdot dx \cdot dy)}^{\text{сила } F} \cdot \overbrace{(\gamma \cdot dz)}^{\text{перемещение } \Delta} = \frac{1}{2} \cdot \tau \cdot \gamma \cdot dx \cdot dy \cdot dz =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \tau \cdot \gamma \cdot dV = \frac{1}{2} \cdot \frac{\tau^2}{G} \cdot dV$$

Удельная потенциальная энергия – энергия единицы объема, своеобразная «плотность энергии» в теле:

$$\boxed{U_0 = \frac{dU}{dV} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\tau^2}{G}} \qquad (III.3)$$

Формулу удельной потенциальной энергии при чистом сдвиге можно так же вывести, рассматривая работу нормальных сил на гранях элементарного объёма. *Рассмотрим рис. III.13б:*



$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \nu \cdot \frac{\sigma_z}{E} = \frac{\sigma}{E} + \nu \cdot \frac{\sigma}{E} = \frac{\sigma}{E} \cdot (1+\nu)$$ (ν – коэффициент Пуассона) ;

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \nu \cdot \frac{\sigma_x}{E} = -\frac{\sigma}{E} - \nu \cdot \frac{\sigma}{E} = -\frac{\sigma}{E} \cdot (1+\nu) \ ;$$

$$\Delta_x = \varepsilon_x \cdot dx = \frac{\sigma}{E} \cdot (1+\nu) \cdot dx \ ;$$

$$\Delta_z = |\varepsilon_z| \cdot dz = \frac{\sigma}{E} \cdot (1+\nu) \cdot dz \ ;$$

$$F_x = \sigma \cdot dz \cdot dy \ ;$$

$$F_z = \sigma \cdot dx \cdot dy \ ;$$

$$dU = dW_\sigma = \frac{1}{2} \cdot F_x \cdot \Delta_x + \frac{1}{2} \cdot F_z \cdot \Delta_z =$$

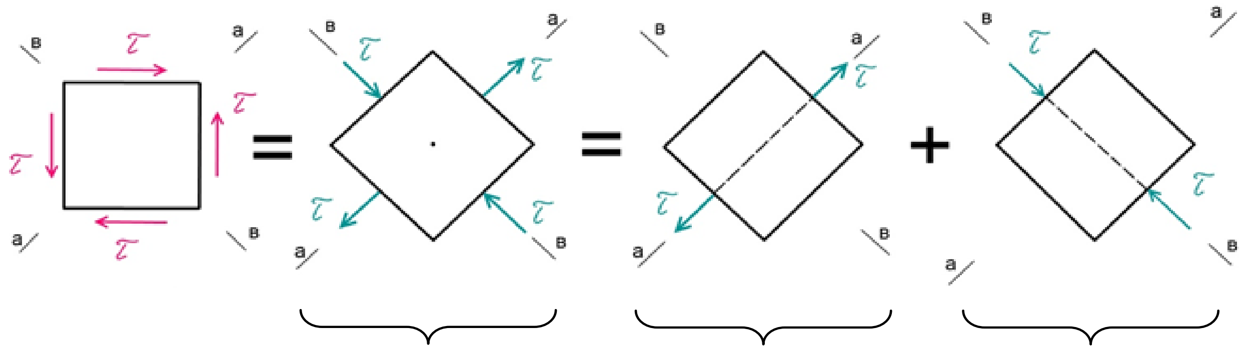
$$= \frac{1}{2} \cdot (\sigma \cdot dz \cdot dy) \cdot \frac{\sigma}{E} \cdot (1+\nu) \cdot dx + \frac{1}{2} \cdot (\sigma \cdot dx \cdot dy) \cdot \frac{\sigma}{E} \cdot (1+\nu) \cdot dz =$$

$$= \frac{\sigma^2 \cdot (1+\nu)}{E} \cdot dx \cdot dy \cdot dz = \frac{\sigma^2 \cdot (1+\nu)}{E} \cdot dV = \frac{\tau^2 \cdot (1+\nu)}{E} \cdot dV \ ;$$

$$\boxed{U_0 = \frac{dU}{dV} = \frac{\tau^2 \cdot (1+\nu)}{E}} \qquad (III.4)$$

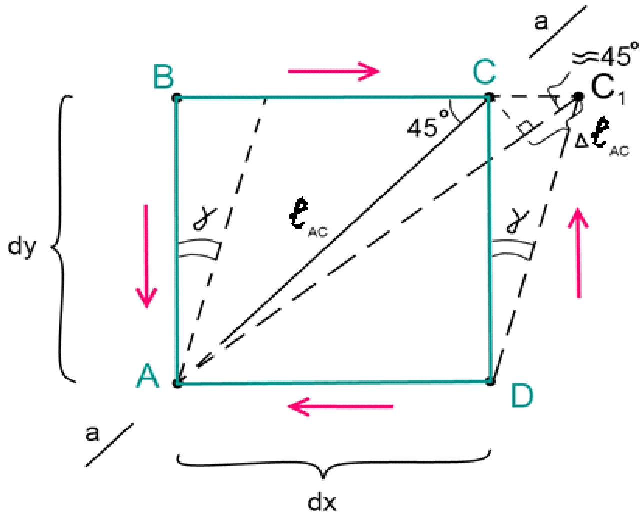
Связь характеристик упругости
материала E, G и ν

а) Линейная деформация в диагональном направлении при чистом сдвиге:



$$\varepsilon_{aa} = \tilde{\varepsilon}_{aa} + \hat{\varepsilon}_{aa} = \frac{\tau}{E}\cdot(1+\nu) \qquad \tilde{\varepsilon}_{aa} = \frac{\sigma_{aa}}{E} = \frac{\tau}{E} \qquad \hat{\varepsilon}_{aa} = -\nu\cdot\frac{\sigma_{вв}}{E} = \nu\cdot\frac{\tau}{E}$$

б) Вывод формулы:



$$dx = dy$$

$$CC_1 = dy\cdot\gamma$$

Длина диагонали:

$$\ell_{AC} = dy\cdot\sqrt{2}$$

Удлинение диагонали:

$$\Delta\ell_{AC} \approx CC_1\cdot\cos 45^\circ = dy\cdot\gamma\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Линейная деформация в диагональном направлении:

$$\begin{cases} \varepsilon_{aa} = \dfrac{\tau}{E}\cdot(1+\nu) & -\,с\;\; одной\;\; стороны\;\; (см.\,п.\,"а)") \\ \varepsilon_{aa} = \dfrac{\Delta\ell_{AC}}{\ell_{AC}} = \dfrac{\gamma}{2} & -\,с\; другой\; стороны\; (из\; определения\; линейной\; деформации) \end{cases}$$

$$\frac{\tau}{E}\cdot(1+\nu) = \frac{\gamma}{2}$$

$$\frac{G\cdot\cancel{\gamma}}{E}\cdot(1+\nu) = \frac{\cancel{\gamma}}{2}$$

$$\boxed{G = \frac{E}{2\cdot(1+\nu)}} \qquad (III.5)$$

(III.5) можно вывести иначе, приравняв формулы удельной потенциальной энергии при чистом сдвиге *(III.3)* и *(III.4)* , ведь они выражают одну и ту же величину:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\cancel{\tau}^2}{G} = \frac{\cancel{\tau}^2 \cdot (1+\nu)}{E}$$

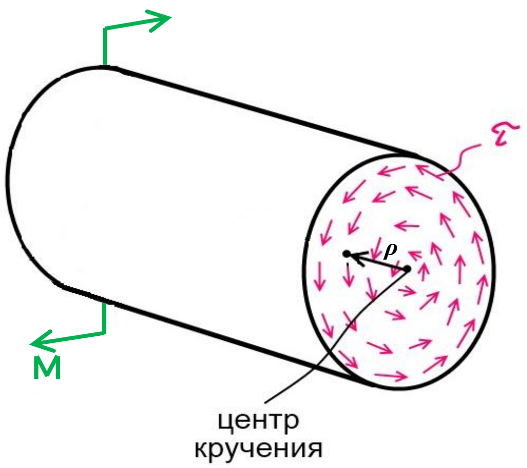
$$G = \frac{E}{2 \cdot (1+\nu)}$$

Кручение бруса круглого поперечного сечения

При расчёте круглого бруса на кручение применимы гипотезы:

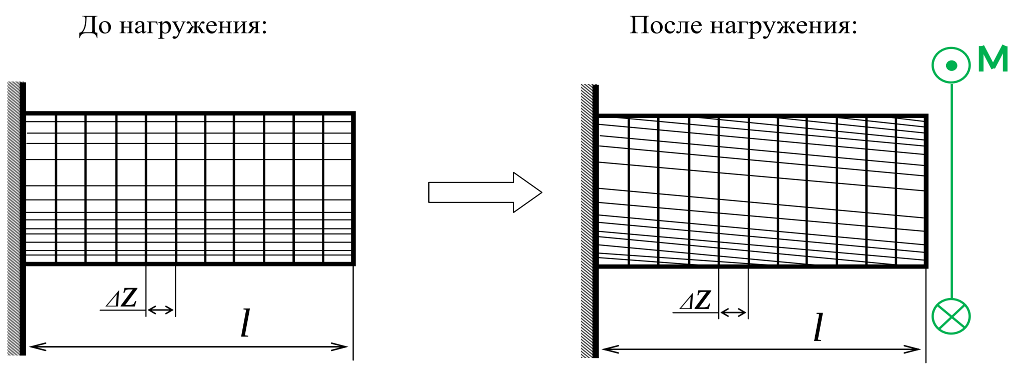
1) ***Гипотеза плоских сечений***: поперечные сечения бруса при кручении остаются плоскими;

2) ***Гипотеза прямых радиусов***: радиус ρ , проведенный из центра кручения к конкретной точке поперечного сечения, при скручивании остаётся прямым и длины своей не меняет:



то есть, поперечное сечение поворачивается, как жёсткое целое.

Экспериментальные данные также показывают, то при закручивании расстояния между поперечными сечениями не меняются:



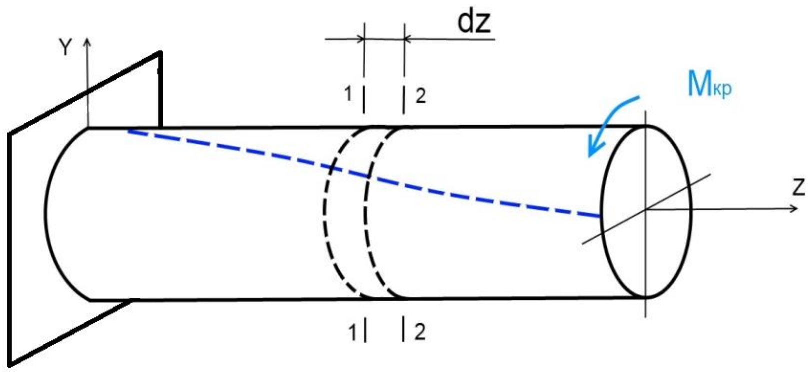


Рис.III.15.

Два бесконечно близких поперечных сечения 1-1 и 2-2, оставаясь плоскими, поворачиваются друг относительно друга на угол $d\varphi$:

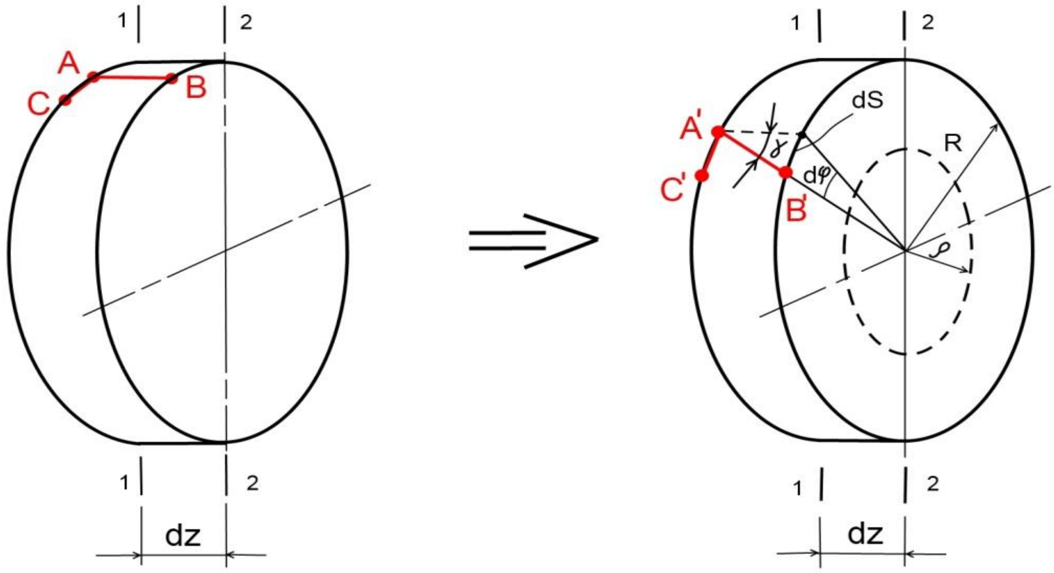


Рис.III.16.

Угловая деформация γ в наружном радиальном слое радиусом R:

$$\begin{cases} dS = R\cdot d\varphi \\ dS = \gamma\cdot dz \end{cases} \Rightarrow \quad R\cdot d\varphi = \gamma\cdot dz \quad \Rightarrow \quad \gamma = R\cdot\frac{d\varphi}{dz}$$

Угловая деформация в произвольном слое радиуса ρ:

$$\gamma = \rho\cdot\frac{d\varphi}{dz} \qquad (III.6)$$

Согласно закону Гука, касательные напряжения:

$$\tau = \gamma\cdot G = \rho\cdot G\cdot\frac{d\varphi}{dz} \qquad (III.7)$$

то есть, касательные напряжения в круглом поперечном сечении распределены линейно относительно радиуса и не меняются по окружной координате *(рис. III.17.)*. Это же подтверждает гидродинамическая аналогия *(рис.III.2.)* и мембранная аналогия *(рис. III.3.)*

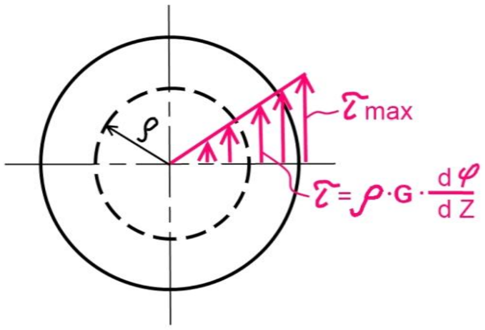
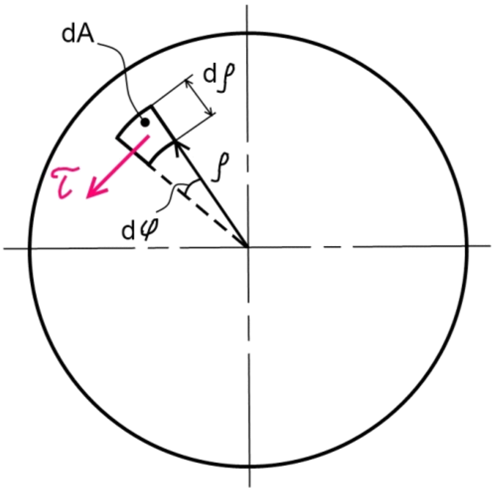


Рис.III.17.

Внутренний крутящий момент $M_{кр}$ в поперечном сечении стержня есть суммарный результат действия касательных напряжений τ в нём:



$$dM_{кр} = \overset{\text{сила}}{dF} \cdot \overset{\text{плечо}}{\rho} = \tau \cdot dA \cdot \rho$$

$$M_{кр} = \int dM_{кр} = \int_A \tau \cdot \rho \cdot dA =$$

$$= \int_A \rho \cdot G \cdot \frac{d\varphi}{dz} \cdot \rho \cdot dA =$$

$$= G \cdot \frac{d\varphi}{dz} \cdot \int_A \rho^2 \cdot dA = G \cdot \frac{d\varphi}{dz} \cdot I_P$$

$$\boxed{d\varphi = \frac{M_{кр} \cdot dz}{G \cdot I_P}} \qquad (III.8)$$

где

$I_P = \int_A \rho^2 \cdot dA$ — ***полярный момент инерции*** поперечного сечения, [$м^4$]; (III.9)

$G \cdot I_P$ — ***жёсткость стержня при кручении***.

I_P вычисляется по формуле, идентичной формуле момента инерции тонкой пластинки единичной плотности (1 $^{кг}/м^2$). Поэтому новое наименование коэффициенту придумывать не стали. Назвали «момент инерции», хотя к физическому явлению *инерции* I_P отношения не имеет.

Расчётные формулы:

Угол поворота произвольного поперечного сечения А:

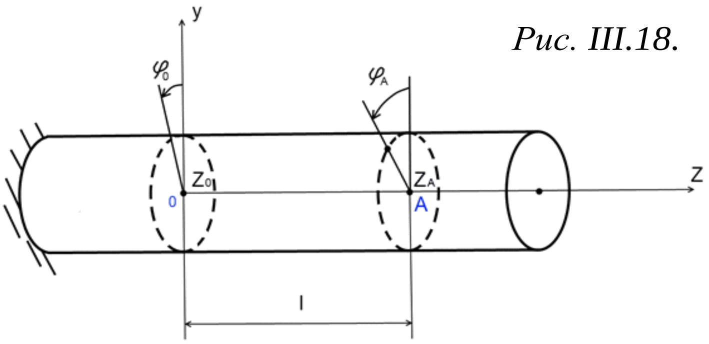


Рис. III.18.

$$\boxed{\begin{aligned}\varphi_A &= \varphi_O + {}_\Delta\varphi_{O\,A} = \\ &= \varphi_O + \int_O^{\ell} \frac{M_{кр} \cdot dz}{G \cdot I_p}\end{aligned}}$$

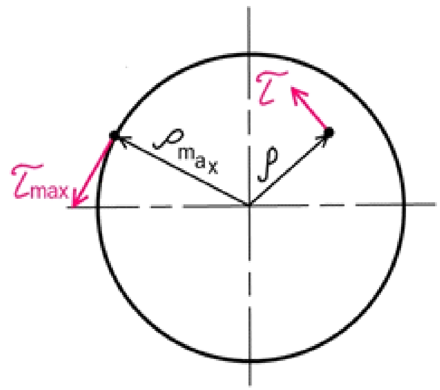
(III.10)

где

φ_O — угол поворота поперечного сечения в начале отсчёта;

$${}_\Delta\varphi_{O\,A} = \int_{Z_O}^{Z_A} d\varphi = \int_0^{l} \frac{M_{кр} \cdot dz}{G \cdot I_p}$$ — угол взаимного поворота поперечных сечений.

Напряжения в произвольном поперечном сечении:



$$\tau = \underbrace{\rho \cdot G \cdot \overset{\overset{\frac{M_{кр}}{G \cdot I_p}\ (II.8)}{//}}{\frac{d\varphi}{dz}}}_{(II.8)} = \frac{M_{кр} \cdot \rho}{I_p}$$

$$\tau_{\max} = \frac{M_{кр} \cdot \rho_{\max}}{I_p} \qquad (III.11)$$

в соответствии с формулой *(III.1)*:

$$\boxed{\tau_{\max} = \frac{M_{кр}}{W_p}} \qquad (III.12)$$

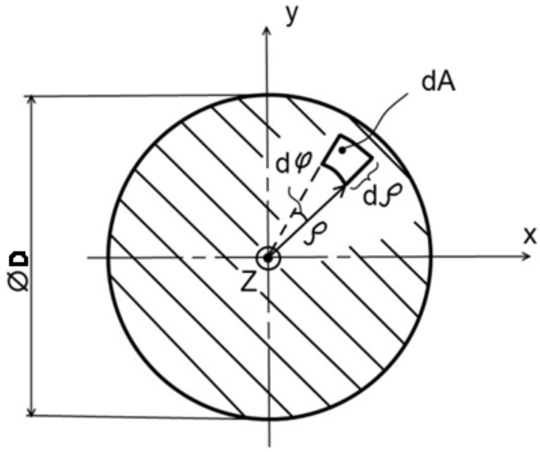
где

$$W_p = \frac{I_p}{\rho_{\max}}$$ — ***полярный момент сопротивления*** *(III.13)*

(момент сопротивления при кручении для круглых и кольцевых поперечных сечений), [м^3].

Геометрические характеристики круглых и кольцевых поперечных сечений при кручении

Круглое поперечное сечение:



Момент инерции элементарной площадки:

$$dI_Z = dI_p = \rho^2 \cdot dA = \rho^2 \cdot (\rho \cdot d\varphi \cdot d\rho) = \rho^3 \cdot d\rho \cdot d\varphi$$

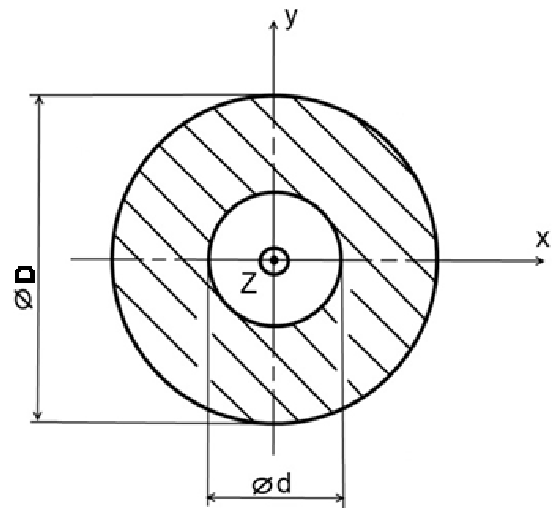
Момент инерции всего сечения — сумма моментов инерции элементарных площадок:

$$I_p = \int dI_p = \int_o^{D/2} \int_o^{2\cdot\pi} \rho^3 \cdot d\rho \cdot d\varphi = 2\cdot\pi\cdot \int_o^{D/2} \rho^3 \cdot d\rho = 2\cdot\pi\cdot \left.\frac{\rho^4}{4}\right|_0^{D/2} = \frac{\pi\cdot D^4}{32} \qquad (III.14)$$

Полярный момент сопротивления:

$$W_p = \frac{I_p}{\rho_{\max}} = \frac{\frac{\pi\cdot D^4}{32}}{\frac{D}{2}} = \frac{\pi\cdot D^3}{16} \qquad (III.15)$$

Круглое поперечное сечение с отверстием:



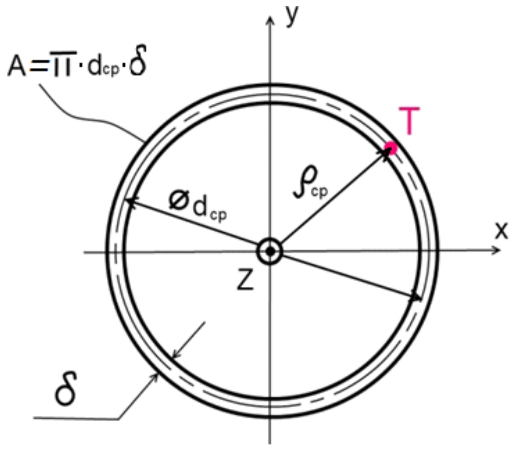
Воспользуемся свойством *аддитивности* моментов инерции (из момента инерции круга, вычтем момент инерции отверстия):

$$I_p = \frac{\pi\cdot D^4}{32} - \frac{\pi\cdot d^4}{32} = \frac{\pi\cdot D^4}{32}\cdot\left[1-\left(\frac{d}{D}\right)^4\right] \qquad (III.16)$$

Полярный момент сопротивления:

$$W_p = \frac{I_p}{\rho_{\max}} = \frac{\frac{\pi\cdot D^4}{32}\cdot\left[1-\left(\frac{d}{D}\right)^4\right]}{\frac{D}{2}} = \frac{\pi\cdot D^3}{16}\cdot\left[1-\left(\frac{d}{D}\right)^4\right] \qquad (III.17)$$

Кольцевое поперечное сечение:



Вспоминаем теоретическую механику: момент инерции тонкого кольца ($\dfrac{\delta}{\rho_{cp}} \le \dfrac{1}{10}$) равен моменту инерции точки ***T***, в которой как бы сосредоточена вся масса (в нашем случае - площадь А) кольца:

$$I_p = \rho_{cp}^2 \cdot A = \frac{d_{cp}^2}{4} \cdot \pi \cdot d_{cp} \cdot \delta = \frac{\pi \cdot d_{cp}^3 \cdot \delta}{4} \qquad (III.18)$$

Полярный момент сопротивления

$$W_p = \frac{I_p}{\rho_{\max}} \approx \frac{I_p}{\rho_{cp}} = \frac{\dfrac{\pi \cdot d_{cp}^3 \cdot \delta}{4}}{\dfrac{d_{cp}}{2}} = \frac{\pi \cdot d_{cp}^2 \cdot \delta}{2}, \qquad [м^3] \qquad (III.19)$$

Работа внешних моментов

Внешние моменты совершают работу на угловых перемещениях (то есть, поворотах) поперечных сечений, к которым они приложены:

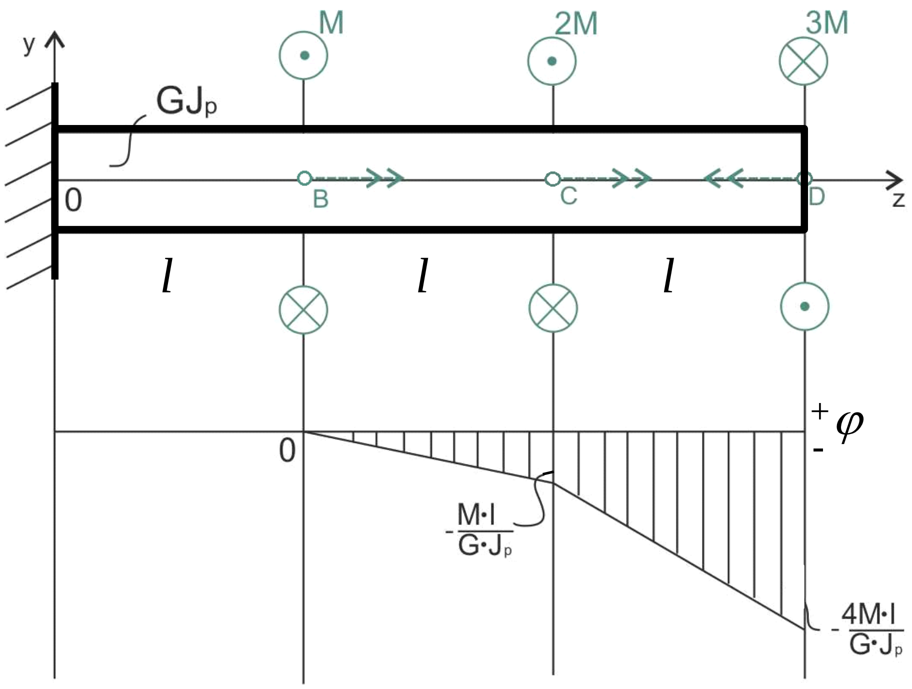


Рис. III.19.

$$A_{M_B} = 0$$

$$A_{M_c} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot M \cdot \left(-\frac{M \cdot l}{G \cdot I_p} \right) = -\frac{M^2 \cdot l}{G \cdot I_p}$$

$$A_{M_D} = \frac{1}{2} \cdot (-3 \cdot M) \cdot \left(-\frac{4 \cdot M \cdot l}{G \cdot I_p} \right) = \frac{6 \cdot M^2 \cdot l}{G \cdot I_p}$$

$$A = A_{M_B} + A_{M_c} + A_{M_D} = 0 - \frac{M^2 \cdot l}{G \cdot I_p} + \frac{6 \cdot M^2 \cdot l}{G \cdot I_p} = \frac{5 \cdot M^2 \cdot l}{G \cdot I_p}$$

Коэффициент ½ имеет здесь ту же природу, что и в работе внешних сил при растяжении (сжатии).

Потенциальная энергия деформации при кручении

Исходим из тех же предположений, что и при растяжении-сжатии: в деформированном упругом теле накопилась потенциальная энергия, равная работе внутренних моментов при нагружении на поворотах поперечных сечений стержня:

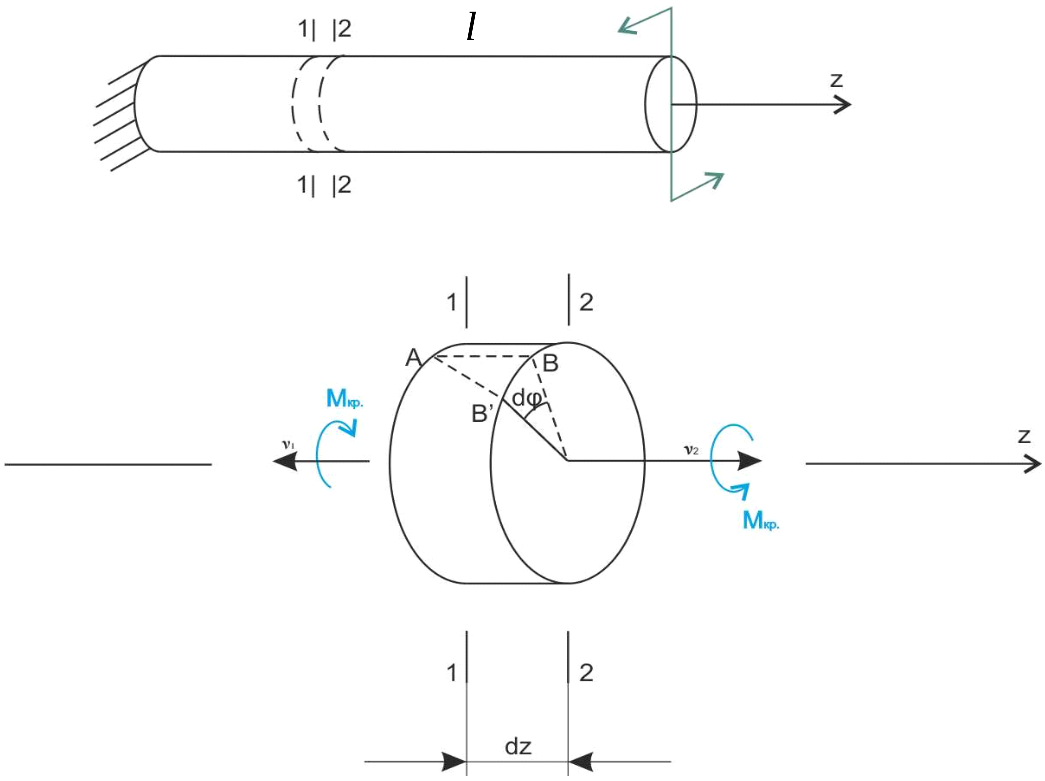


Рис.III.20.

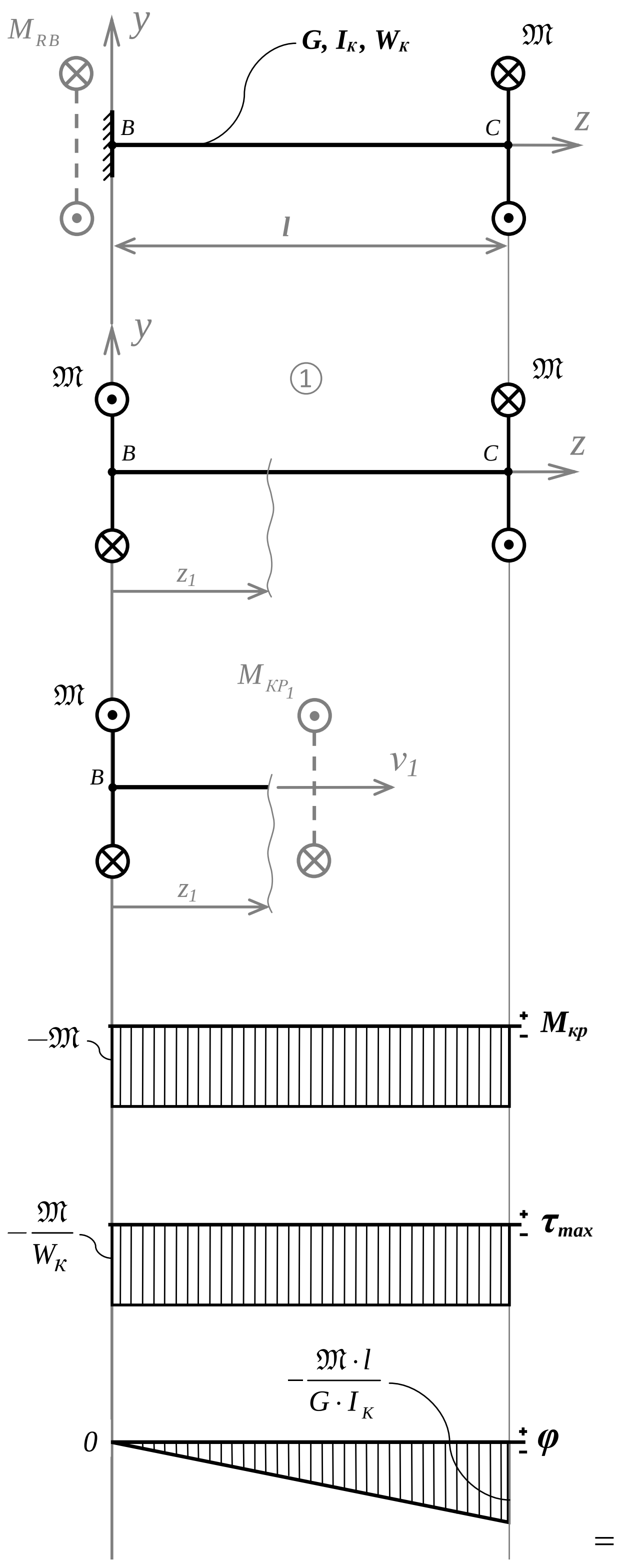
Рассмотрим два бесконечно близких поперечных сечения стержня 1-1 и 2-2 на расстоянии dz друг от друга (*рис.III.20.*). При скручивании стержня, сечения повернутся друг относительно друга на угол $d\varphi$. Работа внутреннего момента $M_{кр}$ на этом повороте:

$$dU = \frac{1}{2} \cdot M_{кр} \cdot d\varphi = \frac{1}{2} \cdot M_{кр} \cdot \overbrace{\left(\frac{M_{кр} \cdot dz}{G \cdot I_p} \right)}^{d\varphi \ по \ (III.7)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{M_{кр}^2 \cdot dz}{G \cdot I_p}$$

А для всего стержня:

$$\boxed{U = \int_0^{\ell} \frac{M_{кр}^2}{2 \cdot G \cdot I_p} \cdot dz} \qquad (III.20)$$

Пример $\boxed{III.1}$:



Дано: $l,\ 𝔐,\ G,\ I_к,\ W_к$

Найти: $M_{кр},\ \tau_{max},\ \varphi,\ A, U$

$$\sum M_z = 0 = -M_{RB} - 𝔐$$

$$M_{RB} = -𝔐$$

$$\sum M_{v_1} = 0 = -𝔐 - M_{кр_1}$$

$$M_{кр_1} = -𝔐$$

$$\tau_{max_1} = \frac{M_{кр_1}}{W_{к_1}} = -\frac{𝔐}{W_к}$$

$$\varphi_1 = \overset{0}{\varphi_0^{кон}} + \int_0^{z_1} \frac{M_{кр_1}\cdot dz_1}{G_1\cdot I_{к_1}} =$$

$$= -\int_0^{z_1} \frac{𝔐\cdot dz_1}{G\cdot I_к} = -\frac{𝔐\cdot z_1}{G\cdot I_к}$$

$$z_1 = 0:\quad \varphi_1^{нач} = 0$$

$$z_1 = l:\quad \varphi_1^{кон} = -\frac{𝔐\cdot l}{G\cdot I_к}$$

Работа внешних моментов:

$$A = \sum_j \frac{1}{2}\cdot M_j\cdot\varphi_j =$$

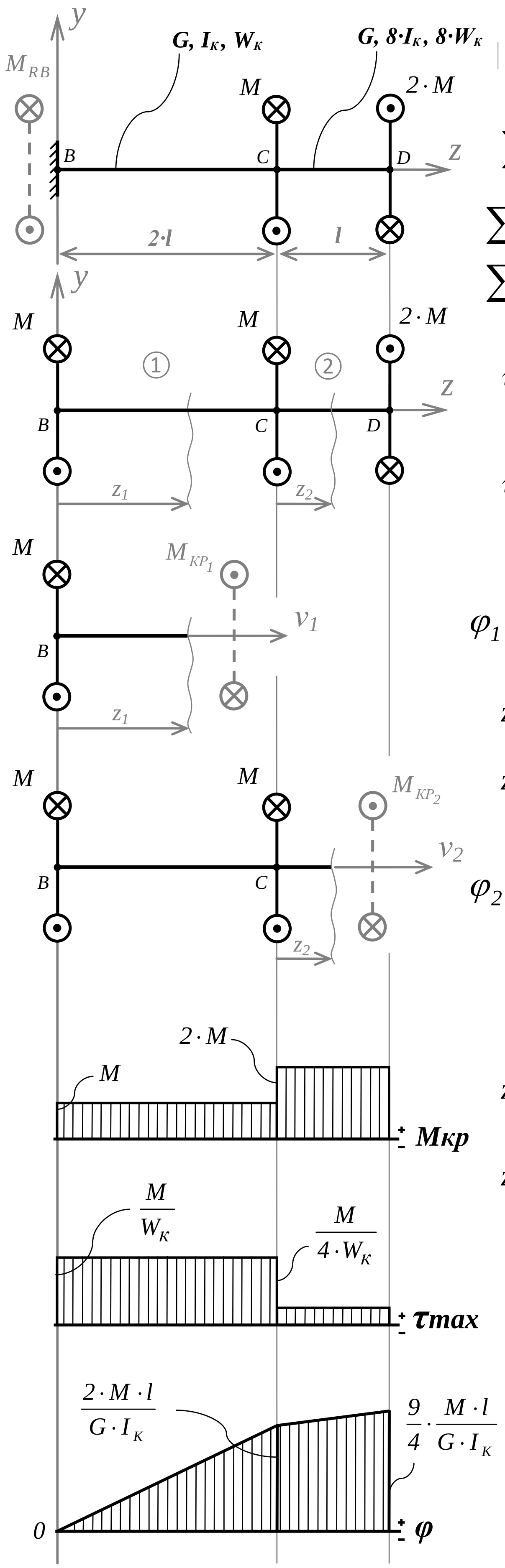
$$= \frac{1}{2}\cdot M_B\cdot\varphi_B + \frac{1}{2}\cdot M_C\cdot\varphi_C =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 𝔐\cdot 0 + \frac{1}{2}\cdot(-𝔐)\cdot\left(-\frac{𝔐\cdot l}{G\cdot I_к}\right) = \frac{𝔐^2\cdot l}{2\cdot G\cdot I_к}$$

Потенциальная энергия деформации: $U = \sum_i \dfrac{M_{кр_i}^2\cdot l_i}{2\cdot G_i\cdot I_{к_i}} = \dfrac{M_{кр_1}^2\cdot l_1}{2\cdot G_1\cdot I_{к_1}} = \dfrac{𝔐^2\cdot l}{2\cdot G\cdot I_к}$

Видим: $\boxed{A = U}$ - так и должно быть в упругих ненагретых системах.

Пример $\boxed{III.2}$:



Дано: $l,\ M\ G, I_к, W_к$

Найти: $M_{кр}, \tau_{max}, \varphi, A, U$

$$\sum M_Z = 0 = -M_{RB} - M + 2\cdot M \Rightarrow M_{RB} = M$$

$$\sum M_{v_1} = 0 = M - M_{кр_1} \Rightarrow M_{кр_1} = M$$

$$\sum M_{v_2} = 0 = -M - M + M_{кр_2} \Rightarrow M_{кр_2} = 2\cdot M$$

$$\tau_{max_1} = \frac{M_{кр_1}}{W_{к_1}} = \frac{M}{W_к}$$

$$\tau_{max_2} = \frac{M_{кр_2}}{W_{к_2}} = \frac{2\cdot M}{8\cdot W_к} = \frac{M}{4\cdot W_к}$$

$$\varphi_1 = \overset{0}{\varphi_0^{кон}} + \int_0^{z_1} \frac{M_{кр_1}\cdot dz_1}{G_1\cdot I_{к_1}} = \int_0^{z_1} \frac{M\cdot dz_1}{G\cdot I_к} = \frac{M\cdot z_1}{G\cdot I_к}$$

$$z_1 = 0: \quad \varphi_1^{нач} = 0$$

$$z_1 = 2\cdot l: \quad \varphi_1^{кон} = \frac{2\cdot M\cdot l}{G\cdot I_к}$$

$$\varphi_2 = \varphi_1^{кон} + \int_0^{z_2} \frac{M_{кр_2}\cdot dz_2}{G_2\cdot I_{к_2}} = \frac{2\cdot M\cdot l}{G\cdot I_к} +$$

$$+ \int_0^{z_2} \frac{2\cdot M\cdot dz_2}{8\cdot G\cdot I_к} = \frac{2\cdot M\cdot l}{G\cdot I_к} + \frac{M\cdot z_2}{4\cdot G\cdot I_к}$$

$$z_2 = 0: \quad \varphi_2^{нач} = \frac{2\cdot M\cdot l}{G\cdot I_к}$$

$$z_2 = l: \quad \varphi_2^{кон} = \frac{9}{4}\cdot\frac{M\cdot l}{G\cdot I_к}$$

$$A = \frac{1}{2}\cdot(-M)\cdot 0 + \frac{1}{2}\cdot(-M)\cdot\frac{2\cdot M\cdot l}{G\cdot I_к} +$$

$$+ \frac{1}{2}\cdot 2\cdot M\cdot\frac{9}{4}\cdot\frac{M\cdot l}{G\cdot I_к} = \frac{5}{4}\cdot\frac{M^2\cdot l}{G\cdot I_к}$$

$$U = \frac{M^2\cdot 2\cdot l}{2\cdot G\cdot I_к} + \frac{(2\cdot M)^2\cdot l}{2\cdot G\cdot 8\cdot I_к} = \frac{5}{4}\cdot\frac{M^2\cdot l}{G\cdot I_к}$$

$$\boxed{A = U}$$

Кручение стержня прямоугольного поперечного сечения

Стержень любого сплошного некруглого поперечного сечения при закручивании подвержен ***депланациям***: сечения *депланируют* (букв. «*выходят из плоскости*»), то есть их точки перемещаются вдоль оси стержня в различных направлениях:

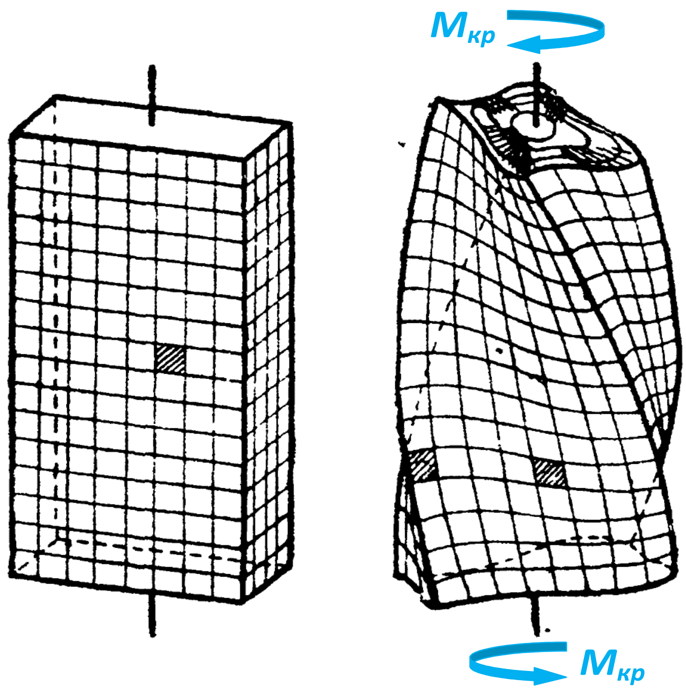


Рис. III.21.

Длина оси стержня при этом всё равно не меняется, ибо осевые перемещения его точек попарно скомпенсированы.

Стеснённым называется кручение стержня, депланации которого принудительно сдерживаются (например, двумя заделками по краям, которые позволяют стержню вращаться, но не позволяют искривляться двум торцевым сечением). При этом в точках стержня возникают различные осевые нормальные напряжения σ (также скомпенсированные, $N=0$ по-прежнему), и дополнительный внутренний крутящий момент из-за чего крутильная жёсткость стержня существенно увеличивается. При стеснённом кручении в стержне возникают не только касательные напряжения, но и напряжения нормальные вдоль его оси.

Свободным (или чистым) называется кручение стержня, при котором депланации ничем не стесняются, точки вдоль оси перемещаются свободно. Именно такое кручение будет рассмотрено далее.

Распределение напряжений τ по поперечному сечению показывает гидродинамическая аналогия и методы теории упругости:

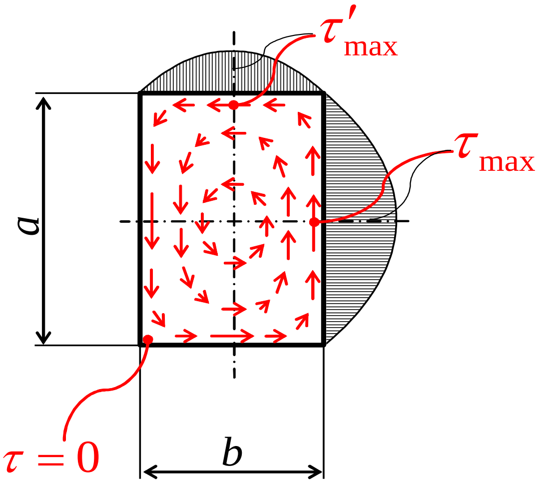


Рис. III.21.

Максимальные касательные напряжения возникают по серединам сторон прямоугольника.

$$\tau_{\max} = \frac{M_{кр}}{W_K}\ ; \qquad \tau'_{\max} = \eta \cdot \tau_{\max}$$

$$\boxed{W_K = \alpha \cdot a \cdot b^2} \qquad (III.21)$$

$$\boxed{I_K = \beta \cdot a \cdot b^3} \qquad (III.22)$$

Здесь b – всегда меньшая из сторон прямоугольника.

Таблица III.1

$\frac{a}{b}$	1	1,5	1,75	2	2,5	3	4	6	8	10	∞
α	0,208	0,231	0,239	0,246	0,258	0,267	0,282	0,299	0,307	0,313	$\frac{1}{3}$
η	1	0,859	0,82	0,795	0,766	0,753	0,745	0,743	0,742	0,742	0,742
β	0,141	0,196	0,214	0,229	0,249	0,263	0,281	0,299	0,307	0,313	$\frac{1}{3}$

Кручение стержня тонкостенного замкнутого поперечного сечения

Гипотезы:

1) Касательные напряжения τ направлены вдоль средней линии стенки;

2) По толщине стенки напряжения не меняются.

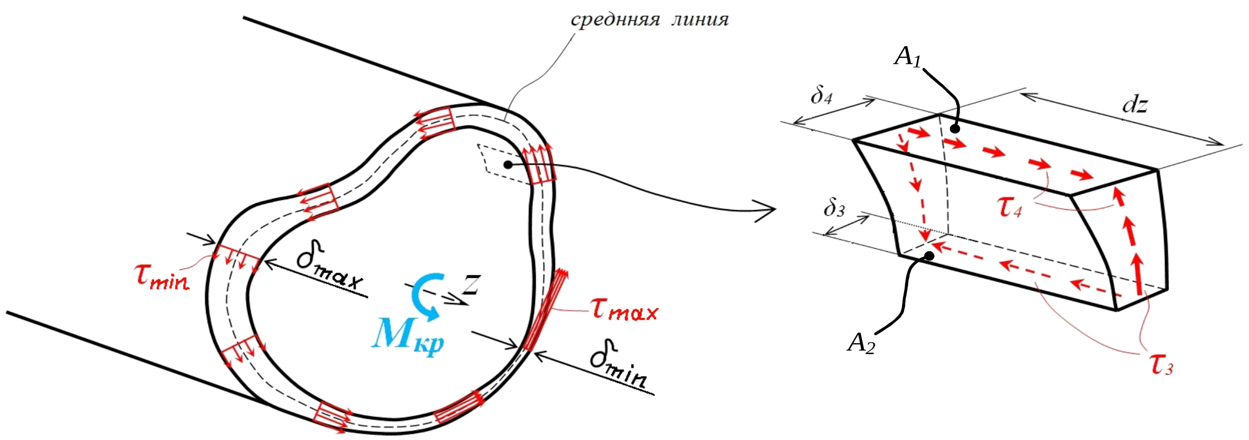


Рис. III.22.

Вспомогательная теорема:

Произведение среднего напряжения на соответствующую толщину стенки в любом месте профиля есть величина постоянная:

$$\tau \cdot \delta = const \qquad (III.23)$$

Доказательство:

Из закрученного бруса выделим элемент двумя продольными и двумя поперечными сечениями (*рис. III.22.*). Полагаем, что по длине бруса толщина его стенки не меняется. Одно из условий равновесия элемента:

$$\Sigma F_Z = 0 = \tau_3 \cdot A_3 - \tau_4 \cdot A_4$$

$$0 = \tau_3 \cdot \delta_3 \cdot \cancel{dz} - \tau_4 \cdot \delta_4 \cdot \cancel{dz}$$

$$\tau_3 \cdot \delta_3 = \tau_4 \cdot \delta_4 \qquad \blacktriangledown$$

Из вспомогательной теоремы следует, что наибольшее напряжение $\tau_{\max}$ в сечении тонкостенного *замкнутого* профиля будет в участке с *наименьшей* толщиной (*рис. III.22.*).

Момент сопротивления при кручении:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{кр}}{W_K}$$

$$W_K = ?$$

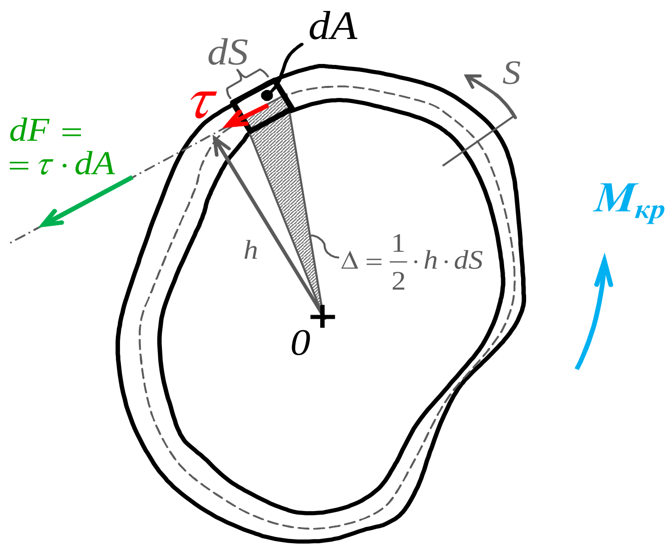


Рис. III.23.

О – центр кручения

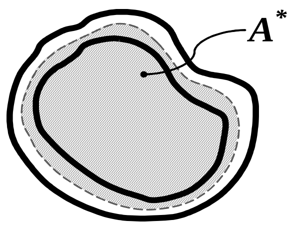
$$dM_{кр} = \overset{сила}{dF} \cdot \overset{плечо}{h} = \tau \cdot dA \cdot h =$$

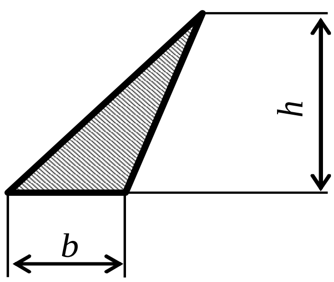
$$= \tau \cdot dS \cdot \delta \cdot h$$

$$M_{кр} = \int dM_{кр} = \oint_S \tau \cdot \delta \cdot h \cdot ds =$$

$$= \tau \cdot \delta \cdot \oint_S \underbrace{h \cdot dS}_{2 \cdot \Delta} = \tau \cdot \delta \cdot 2 \cdot A^*$$

где A^* – площадь, ограниченная средней линией контура:





Площадь треугольника:

$$\frac{1}{2} \cdot b \cdot h$$

Таким образом:

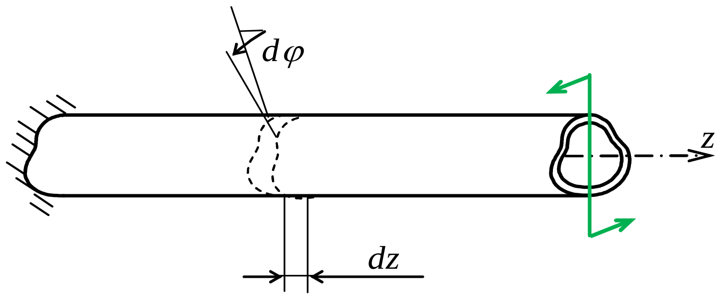
$$M_{кр} = \tau \cdot \delta \cdot 2 \cdot A^*$$

$$\tau_{\max} = \frac{M_{кр}}{2 \cdot A^* \cdot \delta_{\min}} \qquad (III.24)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{W_K = 2 \cdot A^* \cdot \delta_{\min}} \qquad (III.25)$$

Геометрическая жёсткость при кручении:

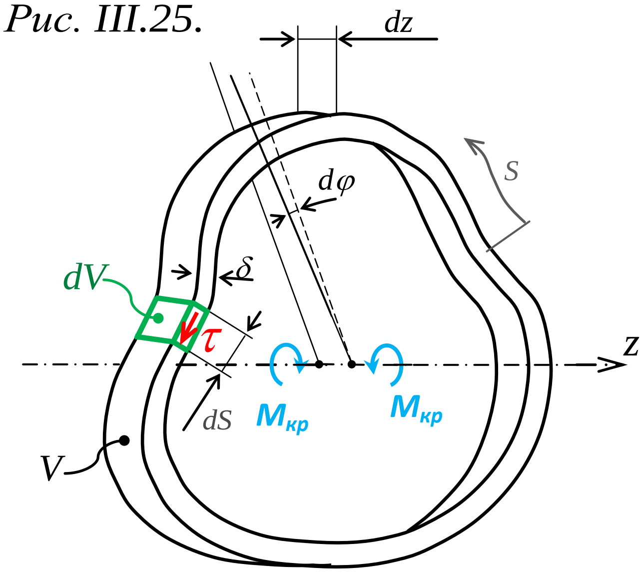


$$d\varphi = \frac{M_{кр}\cdot dz}{G\cdot I_K}$$

Рис. III.24.

$I_K = ?$ – **геометрическая жесткость при кручении**, аналог I_p для круглого поперечного сечения.

Рис. III.25.



Вычислим потенциальную энергию деформации ΔU, накопленную в материале стержня между двумя бесконечно близкими поперечными сечениями (*рис. III.24., III.25.*):

С одной стороны:

$$\Delta U = \frac{1}{\cancel{2}}\cdot \cancel{M_{кр}}\cdot d\varphi$$

с другой:

$$\Delta U = \int\limits_V U_0\cdot dV = \oint\limits_S \underbrace{\frac{1}{2}\cdot\frac{\tau^2}{G}}_{U_0}\cdot\underbrace{dS\cdot\delta\cdot dz}_{dV} = \frac{dz}{2\cdot G}\cdot\oint\limits_S \underbrace{\tau^2}_{\left(\frac{M_{кр}}{2\cdot A^*\cdot\delta}\right)^2}\cdot\delta\cdot dS = \frac{M_{кр}^{\cancel{2}}\cdot dz}{\cancel{2}\cdot 4\cdot G\cdot\left(A^*\right)^2}\cdot\oint\limits_S\frac{dS}{\delta}$$

$\Downarrow$

$$d\varphi = \frac{M_{кр}\cdot dz}{G\cdot\underbrace{\frac{4\cdot(A^*)^2}{\oint\limits_S\frac{ds}{\delta}}}_{I_K}}$$

$$\boxed{I_K = \frac{4\cdot A^{*2}}{\oint\limits_S\frac{ds}{\delta}}} \qquad (III.26)$$

Кручение стержня тонкостенного разомкнутого поперечного сечения

Разомкнутые тонкостенные профили так же, как и сплошные некруглые склоны к депланациям (*рис. III.26.*). Ограничимся рассмотрением свободного кручения.

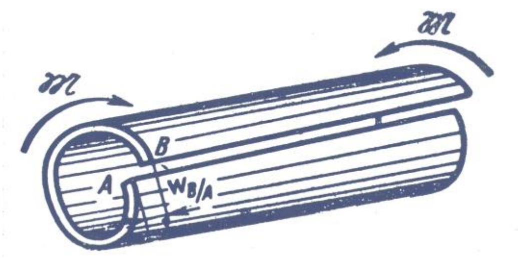


Рис. III.26.

Мембранная аналогия (*рис. III.5.*) показывает: угол наклона наддутой плёнки (аналог касательного напряжения при кручении) зависит от толщины стенки профиля и не зависит от того, каким образом профиль изогнут и изогнут ли он вообще.

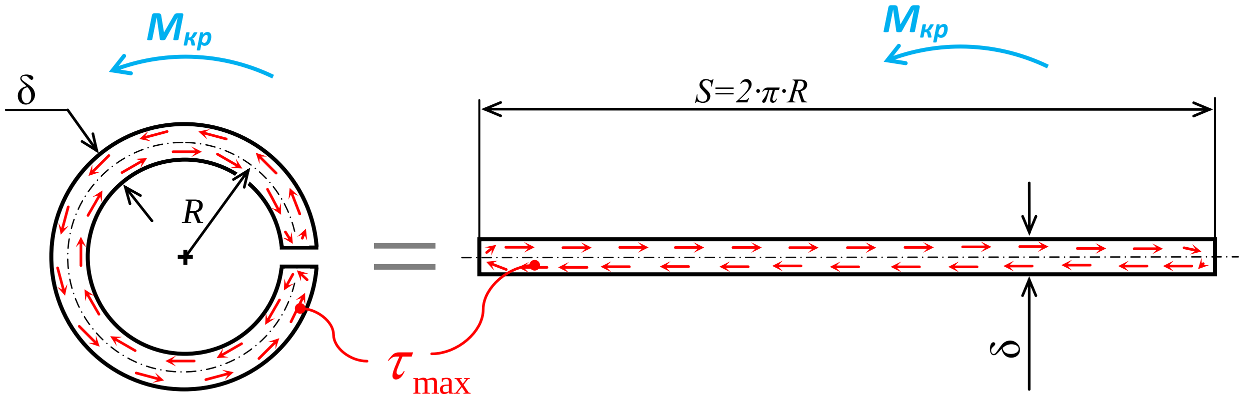


Рис. III.27.

Таким образом, если незамкнутый тонкостенный профиль может быть развернут в прямоугольник, то и его геометрические характеристики при кручении считаются также, как для прямоугольного профиля с соотношением сторон $\dfrac{a}{b} = \infty$ *(см. табл. III.1).*

$$\boxed{\begin{aligned} I_K &= \frac{1}{3}\cdot S\cdot\delta^3 \quad &(III.27)\\ W_K &= \frac{1}{3}\cdot S\cdot\delta^2 \quad &(III.28)\end{aligned}}$$

Части составного тонкостенного профиля ведут себя при кручении, как самостоятельные прямоугольные профили, объединённые единственным условием: поворачиваются они, как жёсткое целое. Так, для профиля, изображённого на *рис. III.28.*: $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \varphi$

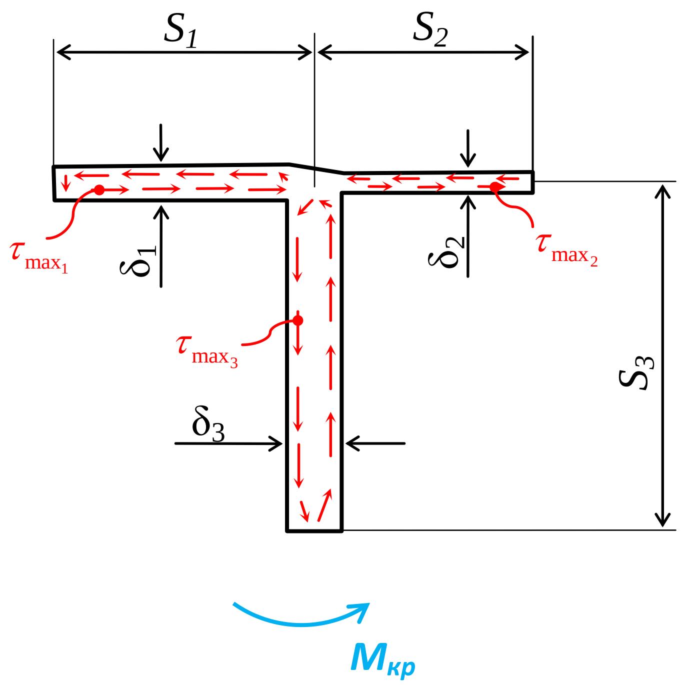


Рис. III.28.

Соответственно, внутренний крутящий момент всего сечения рассматривают, как сумму внутренних крутящих моментов в каждой части:

$$\left(\varphi = \frac{M_{кр} \cdot l}{G \cdot I_к}\right) \qquad M_{кр} = M_{кр1} + M_{кр2} + M_{кр3}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\cancel{\varphi} \cdot \cancel{G} \cdot I_K}{\cancel{l}} = \frac{\cancel{\varphi_1} \cdot \cancel{G} \cdot I_{K1}}{\cancel{l}} + \frac{\cancel{\varphi_2} \cdot \cancel{G} \cdot I_{K2}}{\cancel{l}} + \frac{\cancel{\varphi_3} \cdot \cancel{G} \cdot I_{K3}}{\cancel{l}}$$

$$\Downarrow$$

$$I_K = I_{K1} + I_{K2} + I_{K3}$$

Здесь l – длина стержня рассматриваемого сечения.

В общем случае для тонкостенного разомкнутого профиля, состоящего из i частей:

$$\boxed{I_K = \sum_i I_{Ki} = \sum_i \left(\frac{1}{3} \cdot S_i \cdot \delta_i^3\right)} \qquad (III.29)$$

Доля внутреннего крутящего момента в i-й части открытого профиля:

$$M_{кр\,i} = \frac{\varphi_i \cdot G \cdot I_{K\,i}}{l} = \frac{\varphi \cdot G \cdot I_{K\,i}}{l} = \frac{\frac{M_{кр} \cdot \cancel{l}}{\cancel{G} \cdot I_к} \cdot \cancel{G} \cdot I_{K\,i}}{\cancel{l}} = M_{кр} \cdot \frac{I_{K\,i}}{I_к}$$

Максимальное касательное напряжение в i-й части открытого профиля:

$$\tau_{\max\,i} = \frac{M_{кр\,i}}{W_{K\,i}} = \frac{M_{кр} \cdot \frac{I_{K\,i}}{I_K}}{W_{K\,i}} = \frac{M_{кр}}{I_K} \cdot \frac{I_{K\,i}}{W_{K\,i}} = \frac{M_{кр}}{I_K} \cdot \frac{\frac{1}{3} \cdot \delta_i^3 \cdot S_i}{\frac{1}{3} \cdot \delta_i^2 \cdot S_i} = \frac{M_{кр}}{I_K} \cdot \delta_i$$

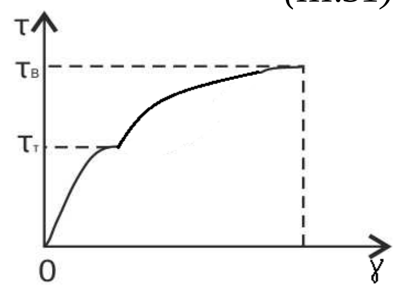
Видно, что наибольшее напряжение $\tau_{\max}$ в сечении тонкостенного *разомкнутого* профиля будет в участке с *наибольшей* толщиной.

$$\boxed{W_K = \frac{I_K}{\delta_{\max}}} \qquad (III.30)$$

Расчёт на прочность при кручении.

Принципиально ничем не отличается от расчёта на прочность при растяжении-сжатии:

$$\tau_{\max} \le \tau_{пред} \tag{III.31}$$



$\tau_{пред} = \tau_T$ — для пластичных материалов;

$\tau_{пред} = \tau_B$ — для хрупких материалов.

Расчётный коэффициент запаса прочности:

$$n = \frac{\tau_{пред}}{\tau_{\max}} \tag{III.32}$$

Нормативный коэффициент запаса прочности:

$$[n] = n_{\min} \quad \text{— \textit{установлен законодательно}} \tag{III.33}$$

Условие гарантированного неразрушения конструкции:

$$\tau_{\max} \le [\tau] \tag{III.34}$$

где

$[\tau] = \dfrac{\tau_{пред}}{[n]}$ — допустимое напряжение.

▼

В процессе создания, конструкция проходит через два расчёта:

I) Проектировочный;

II) Проверочный.