V

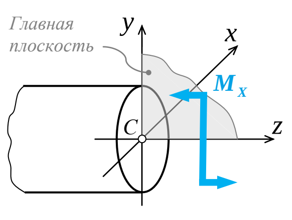
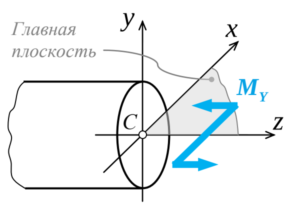
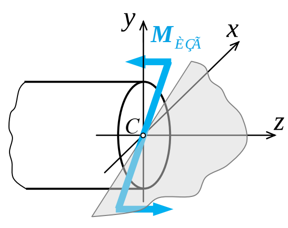
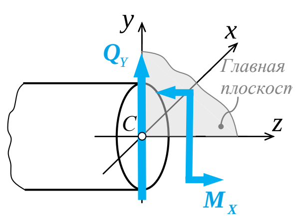
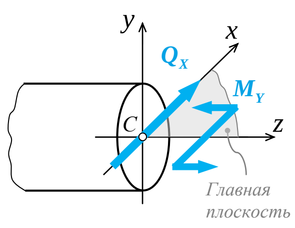
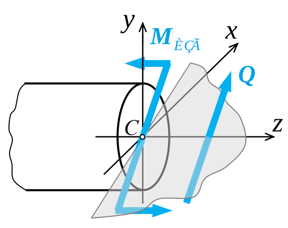
И з г и б.

Изгибом называется такой вид нагружения стержня, при котором в его поперечных сечениях остаётся не равным нулю ~~только~~ внутренний изгибающий момент.

Прямым изгибом называется нагружение, при котором балка изгибается в плоскости действия внутреннего изгибающего момента; ***косыми изгибом*** называется нагружение, при котором балка выходит из этой плоскости.

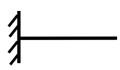
Таблица *V.1.*

Виды изгиба (*x*, *y* – главные центральные оси поперечного сечения). Серым цветом показаны плоскости, в которых происходит смещение точек оси:

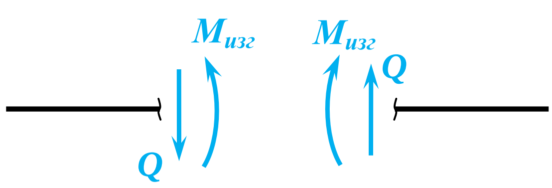
	Прямой		Косой
Чистый			
Поперечный			

Эти случаи мы далее будем изучать в качестве примеров прямого изгиба.

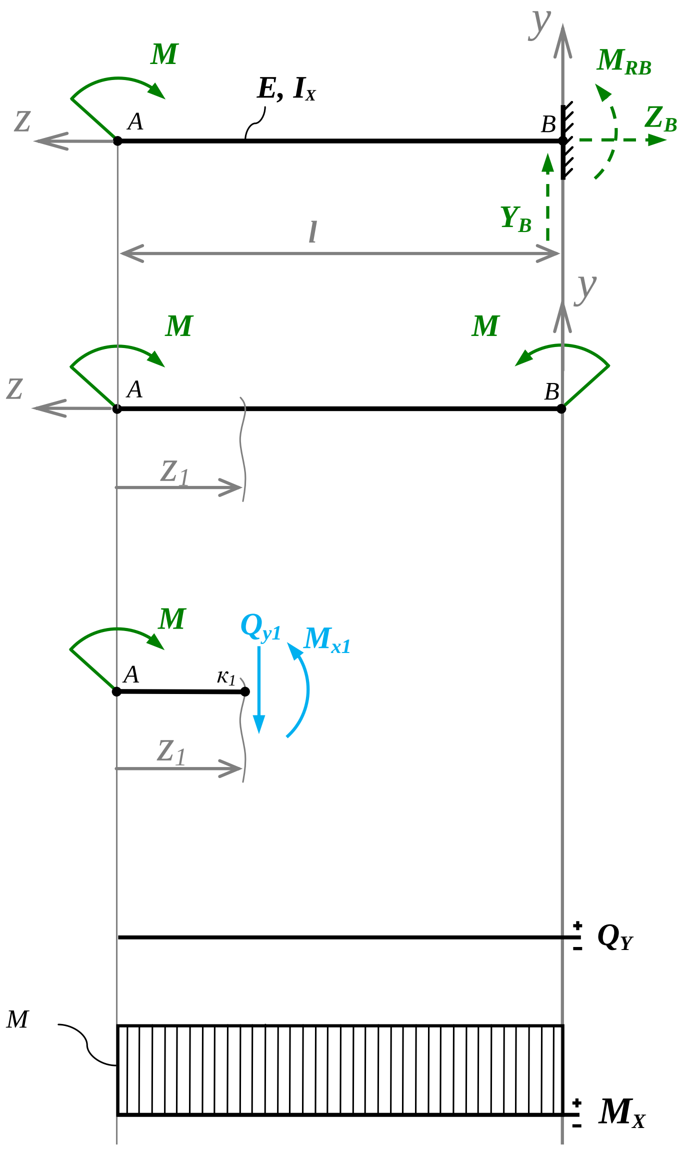
Стержень, работающий на изгиб – ***балка***;

Балка, заделанная на одном конце – ***консоль***; 

При решении задач *положительные* направления внутреннего изгибающего момента и внутренней перерезывающей силы определяют по правилу знаков:



Пример $\boxed{V.1}$:



Реакции опор:

$$\sum F_z = 0 = -Z_B \quad \Rightarrow \quad Z_B = 0$$

$$\sum F_y = 0 = Y_B$$

$$\sum M_B = 0 = -M + M_{RB} \Rightarrow M_{RB} = M$$

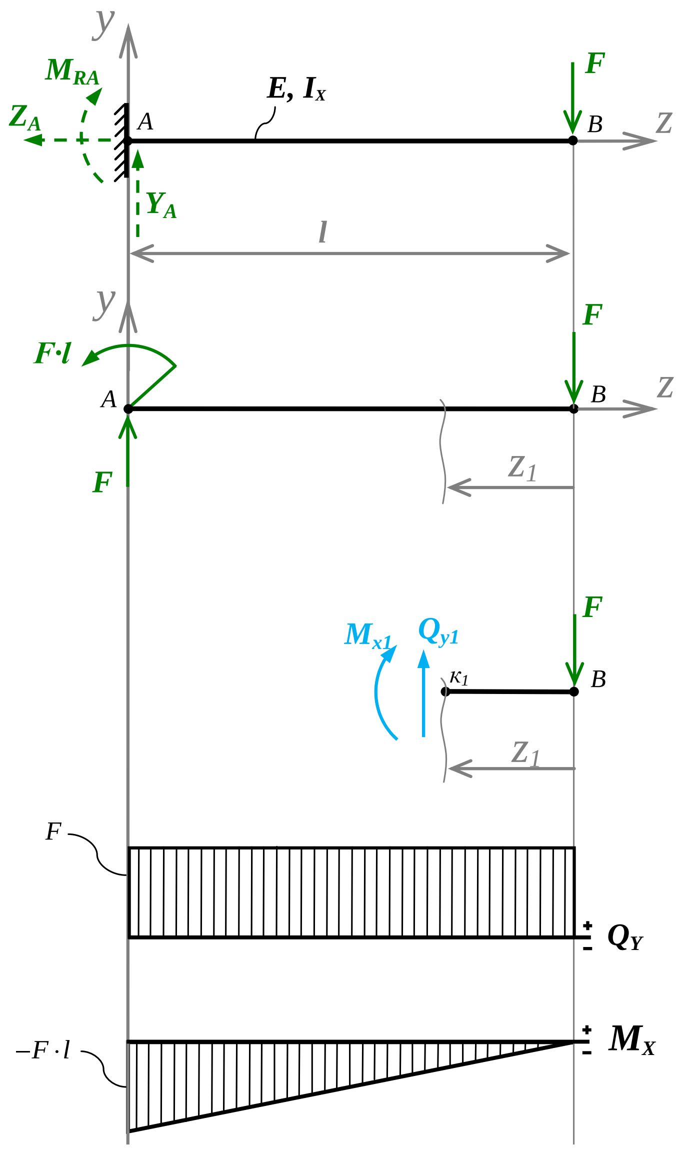
РОЗУ:

$$\sum F_{y_1} = 0 = -Q_{y_1} \quad \Rightarrow \quad Q_{y_1} = 0$$

$$\sum M_{K_1} = 0 = -M + M_{x_1} \Rightarrow M_{x_1} = M$$

$Q_Y = 0$ $\Rightarrow$ чистый изгиб

Пример $\boxed{V.2}$:



Реакции опор:

$$\sum F_Z = 0 = -Z_A \quad \Rightarrow \quad Z_A = 0$$

$$\sum F_y = 0 = Y_A - F \quad \Rightarrow \quad Y_A = F$$

$$\sum M_A = 0 = -M_{RA} - F \cdot l$$

$$M_{RA} = -F \cdot l$$

РОЗУ:

$$\sum F_{y_1} = 0 = Q_{y_1} - F \quad \Rightarrow \quad Q_{y_1} = F$$

$$\sum M_{K_1} = 0 = -F \cdot z_1 - M_{x_1}$$

$$M_{x_1} = -F \cdot z_1$$

$$ò.B: \; z_1 = 0: \quad M_{x_1} = 0$$

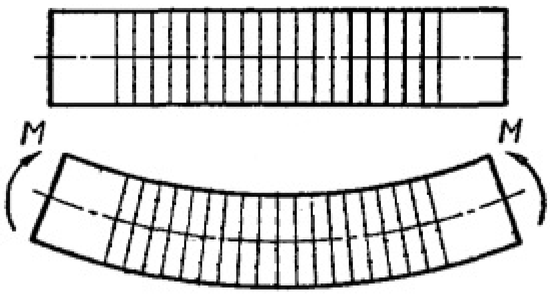
$$ò.A: \; z_1 = l: \quad M_{x_1} = -F \cdot l$$

$Q_Y \neq 0 \;\; \Rightarrow$ поперечный изгиб

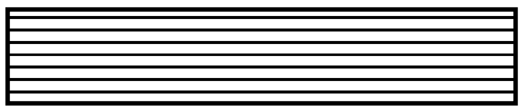
Гипотезы

Для упрощения расчётных формул (без внесения существенной погрешности в результаты) используют следующие гипотезы:

1) ***Гипотеза плоских сечений*** – плоские сечения, перпендикулярные оси балки до нагружения, остаются плоскими и перпендикулярными оси балки и после нагружения:



2) ***Гипотеза о ненадавливании продольных слоёв*** – при изгибе продольные слои балки друг на друга не давят:



Применение этих гипотез позволяет в формулах изгиба учитывать действие только осевых нормальных напряжений σ_z (*рис V.1.*), остальными напряжениями пренебречь. Таким образом, напряжённое состояние точек стержня в состоянии чистого изгиба такое же, как и у точек стержня растянутого (сжатого) – одноосное.

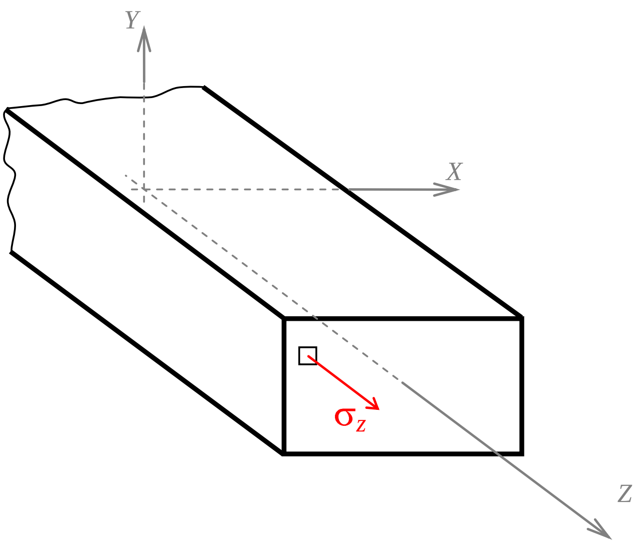


Рис. V.1.

Именно поэтому, например, волокна дерева протянуты вдоль ствола – по направлению действия наибольших напряжений.

Напряжения σ_z (далее – просто σ) при изгибе переменны по сечению. Максимальное по модулю напряжение в поперечном сечении пропорционально действующему в нём изгибающему моменту $M_{изг}$:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{изг}}{W_{изг}} \qquad (V.1)$$

где

$W_{изг}$ – ***момент сопротивления сечения при изгибе***, [м^3].

Прямой чистый изгиб

Деформации слоёв балки при её чистом изгибе в плоскости рисунка возникают в результате взаимного поворота плоских поперечных сечений:

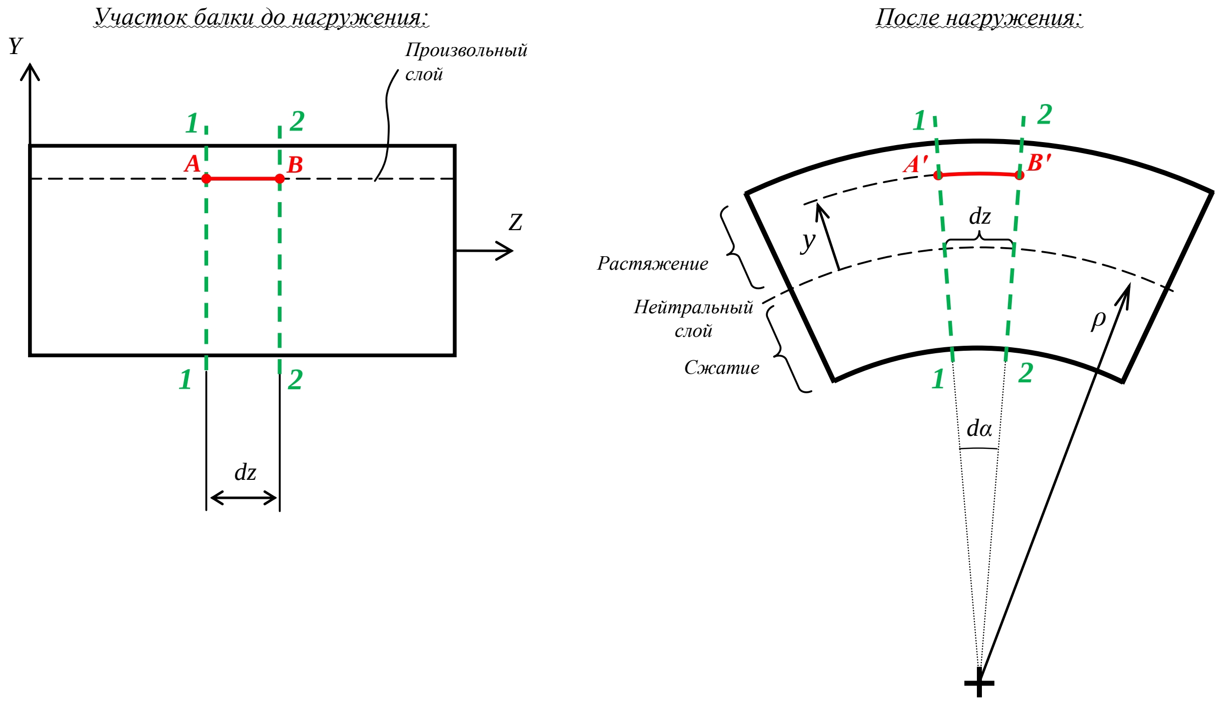


Рис. V.2.

Часть продольных слоёв балки растягивается, часть – сжимается. Их разделяет ***нейтральный слой***, длина которого остаётся неизменной.

Бесконечно близкие поперечные сечения ***1-1*** и ***2-2*** (*рис V.2.*) взаимно поворачиваются, оставаясь плоскими.

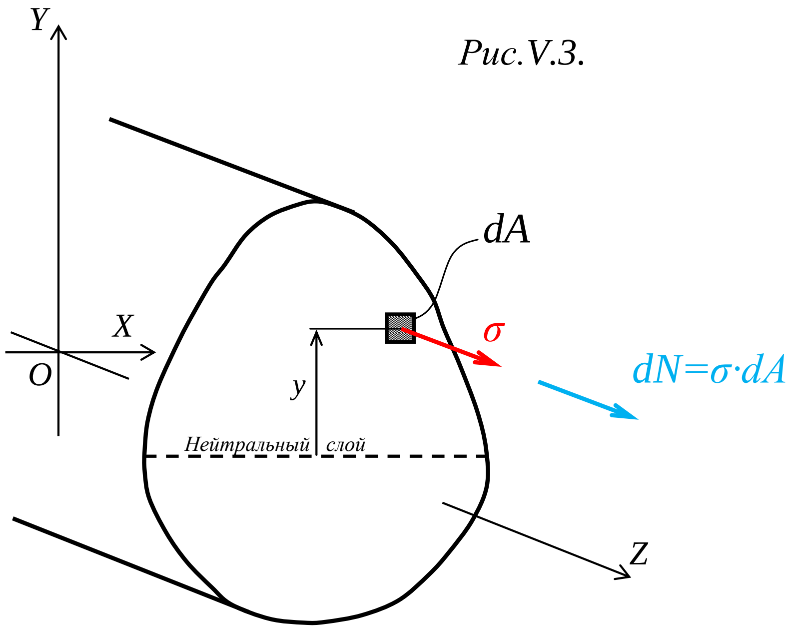
Продольная деформация ε в произвольном слое на расстоянии y от нейтрального:

$$\varepsilon = \frac{A'B' - AB}{AB} = \frac{\cancel{d\alpha} \cdot (\cancel{\rho} + y) - \cancel{d\alpha} \cdot \cancel{\rho}}{\cancel{d\alpha} \cdot \rho} = \frac{y}{\rho} \qquad (V.2)$$

По закону Гука для одноосного напряжённого состояния $\sigma = E \cdot \varepsilon$, значит:

$$\sigma = E \cdot \frac{y}{\rho} \qquad (V.3)$$

Рис.V.3.



Внутренний изгибающий момент M_X (его вектор направлен вдоль оси OX (*рис.V.3.*) есть интегральная сумма действующих в поперечном сечении усилий:

$$M_x = \int\limits_A \overset{\text{Плечо}}{y} \cdot \overset{\text{Сила}}{dN} = \int\limits_A y \cdot \sigma \cdot dA = \int\limits_A y \cdot E \cdot \frac{y}{\rho} \cdot dA = \frac{E}{\rho} \cdot \int\limits_A y^2 \cdot dA = \frac{E}{\rho} \cdot I_x$$

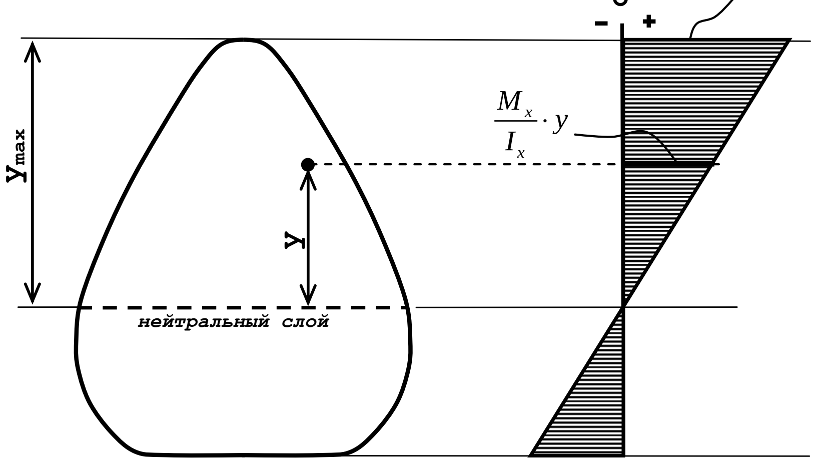
$$\boxed{\frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{E \cdot I_x}}$$ Связь между внутренним изгибающим моментом и кривизной оси бруса *(V.4)*

Подставляя (*V.4*) в (*V.3*) получим:

$$\boxed{\sigma = \frac{M_x}{I_x} \cdot y}$$ Для точки поперечного сечения, отстоящей от нейтрального слоя на *y*. *(V.5)*

То есть напряжения по высоте поперечного сечения изменяются линейно:

Рис.V.4.



$$\boxed{\sigma_{\max} = \frac{M_x}{I_x} \cdot y_{\max}}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{W_{изг} = W_x = \frac{I_x}{y_{\max}}} \qquad (V.6)$$

Положение нейтральной линии:

При изгибе внутренняя осевая растягивающая сила N отсутствует:

$$N = 0 = \int_A dN = \int_A \sigma \cdot dA = \frac{M_x}{I_x} \cdot \int_A y \cdot dA = \frac{M_x}{I_x} \cdot S_x$$

$M_x \neq 0,\ \mathrm{I}_x \neq 0 \quad \Rightarrow \quad S_x = 0 = y_c \cdot A \quad \Rightarrow \quad y_c = 0$ нейтральный слой, от которого отсчитывается координата y **проходит через центр тяжести поперечного сечения стержня.**

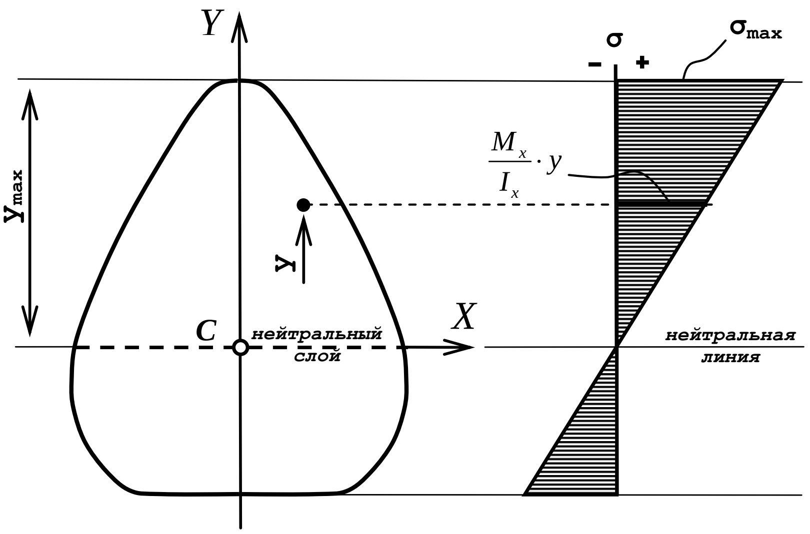


Рис.V.5.

Условие существования прямого изгиба

Докажем утверждение о том, что прямой изгиб возможен только в том случае, когда плоскость действия внутреннего изгибающего момента $M_{изг}$ совпадает с одной из главных плоскостей поперечного сечения (см. табл. *V.1*) – плоскостью *XZ* или плоскостью *YZ*.

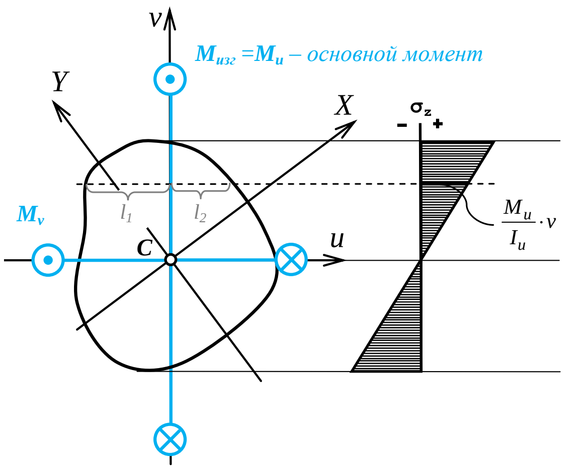


Рис.V.6.

Всякий внутренний изгибающий момент $M_{изг}$ стремится развернуть плоские сечения именно в своей плоскости (*рис. V.2.*), и создать эпюру нормальных напряжений, показанную на *рис. V.5*. Допустим (*рис. V.6.*), вектор внутреннего изгибающего момента $M_{изг}=M_u$ направлен вдоль центральной оси *u*. Прямым изгиб будет тогда, когда это неравномерное распределение напряжений, накладываясь на геометрию сечения будет самоуравновешено – момент M_v от этих напряжений относительно ортогональной оси v будет равен нулю. Посмотрим условие, при котором это происходит.

$$M_v = 0 = \int_A \sigma \cdot dA \cdot u = \int_A \frac{M_u}{I_u} \cdot v \cdot u \cdot dA = \frac{M_u}{I_u} \cdot \int_A u \cdot v \cdot dA = \frac{M_u}{I_u} \cdot I_{uv} \quad \Rightarrow \quad I_{uv} = 0$$

Равенство нулю центробежного момента – признак главных осей. Значит, дополнительный момент равен нулю (прямой изгиб) только тогда, когда центральные оси u и v совпадают с главными центральными осями *X* и *Y* поперечного сечения.

Убедиться в этом можно, например, изгибая подвешенными на конце грузами консоль прямоугольного поперечного сечения (обычную металлическую линейку):

а) Оси u и v не совпадают с главными центральными осями x и y поперечного сечения.

б) Оси u и v совпадают с главными центральными осями x и y поперечного сечения.

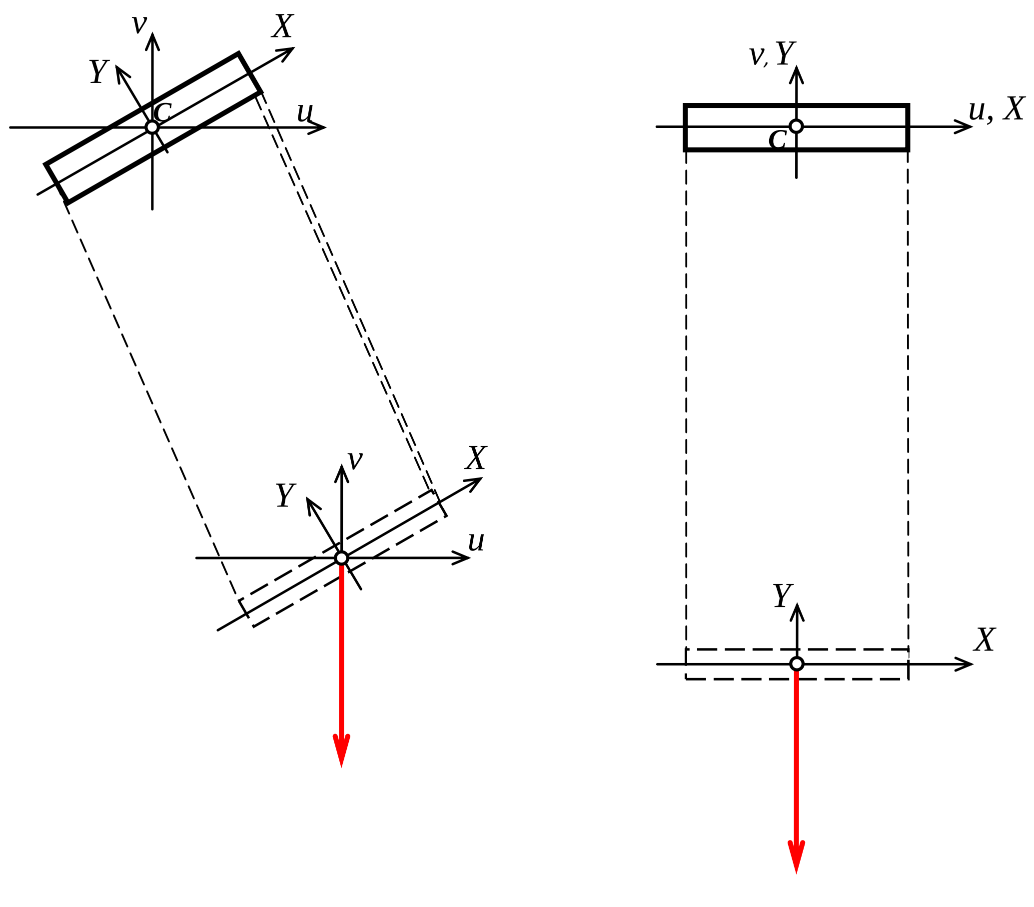


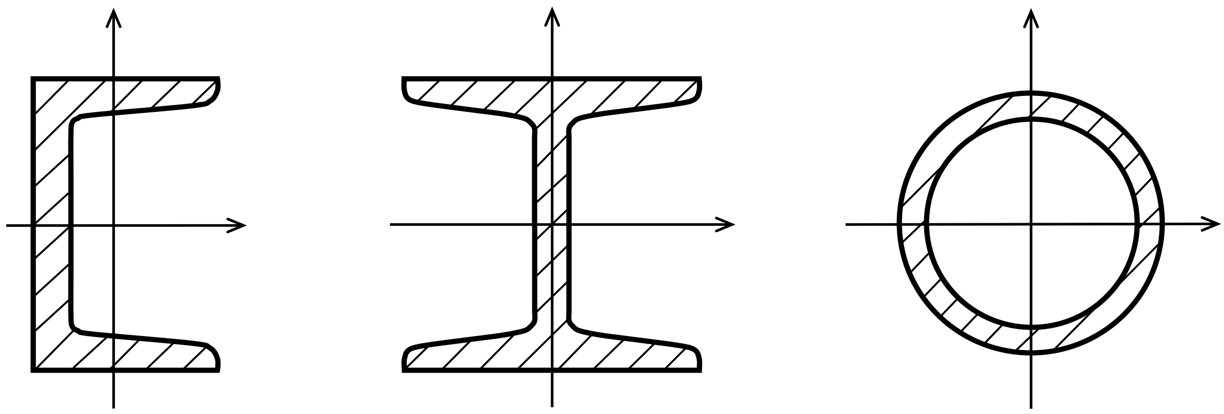
Рис.V.7.

Сложные процессы, возникающие в том случае, когда $I_{uv} \neq 0$ и приводящие, в конце концов, к возникновению косого изгиба, рассматривать не будем. Задача данной главы – сформулировать условие, при котором они даже не начинаются.

Рациональные поперечные сечения

Из рис. *V.5.* видно, что наибольшие напряжения действуют на удалении от центра тяжести поперечного сечения.

Очевидно, именно там и нужно сосредоточить основное количество материала стержня. Подобная форма позволит при том же весе стержня увеличить момент инерции его поперечных сечений I_x:



а) *Швеллер* *б)* *Двутавр* *в)* *Кольцо*

Рис. V.8.

Кольцевое поперечное сечение имеют, например, стебли трав.

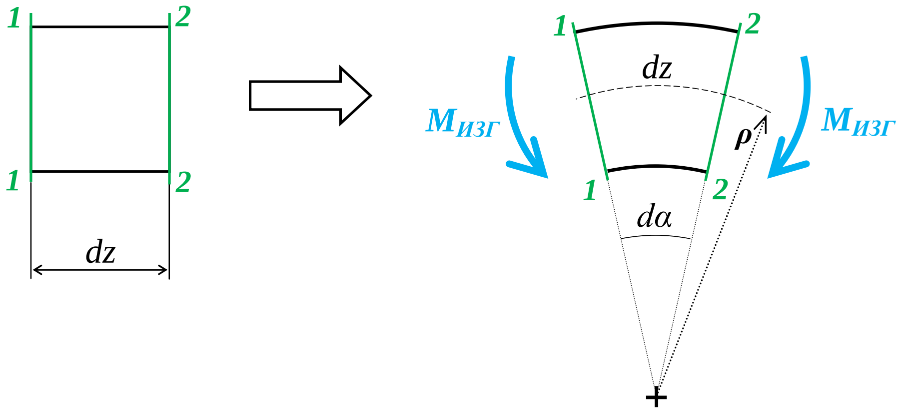
Потенциальная энергия

Как и раньше, считаем потенциальную энергию упругой деформации равной работе, которую внутренние усилия совершают на перемещениях точек тела при нагружении.

При изгибе это - работа внутренних изгибающих моментов на поворотах поперечных сечений.

Например, взаимно развернув поперечные сечения 1-1 и 2-2 на угол $d\alpha$ внутренний изгибающий момент M_x накопил потенциальную энергию в материале между ними:

$$dU = \frac{1}{2} \cdot M_{изг} \cdot d\alpha = \frac{1}{2} \cdot M_{изг} \cdot \frac{dz}{\rho} = \frac{1}{2} \cdot M_{изг} \cdot \frac{M_{изг}}{E \cdot I_x} \cdot dz = \frac{1}{2} \cdot \frac{M_{изг}^2}{E \cdot I_x} \cdot dz$$



Полная потенциальная энергия, накопленная в стержне при чистом изгибе есть интеграл по его длине:

$$\boxed{U = \int \frac{M_{изг}^2 \cdot dz}{2 \cdot E \cdot I_x}} \qquad (V.7)$$

Расчёт на прочность при изгибе

В точках изогнутого стержня, так же как и при растяжении – сжатии, реализуется одноосное напряжённое состояние:

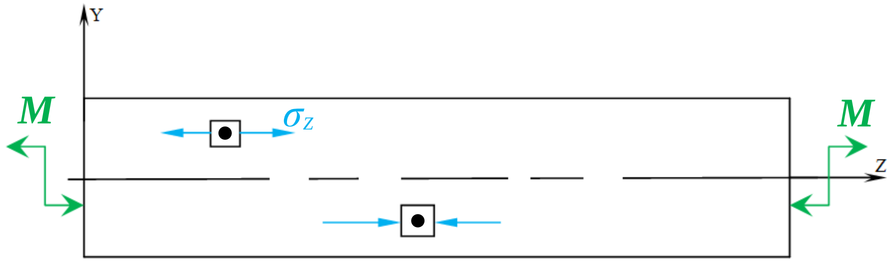


Рис.V.9.

От растяжения (сжатия) (*рис.II.4.*) изгиб отличаются только тем, что напряжения по перечному сечению распределены неравномерно (*рис.V.5.*).

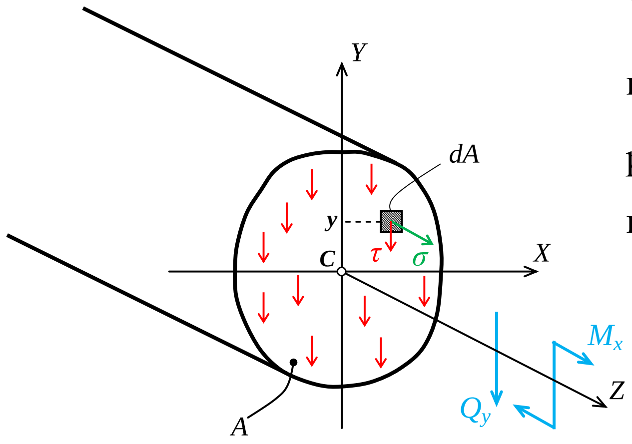
Поэтому, расчёт на прочность при изгибе почти идентичен расчёту на прочность при растяжении (сжатии) – формулы *(II.11)*, *(II.12)*, *(II.13)* и *(II.14)* - за исключением двух моментов:

1) Если предел текучести при растяжении равен пределу текучести при сжатии ($\sigma_{TP} = \sigma_{TC}$) то в качестве $\sigma_{\max}$ берётся максимальное по модулю напряжения в сечении.

2) Если $\sigma_{TP} \neq \sigma_{TC}$ (или $\sigma_{BC} \neq \sigma_{BP}$ для хрупких материалов), то коэффициенты запаса прочности считаются отдельно для сжатой и для растянутой частей поперечного сечения и выбирается меньший из них.

Поперечный изгиб

При этом виде нагружения в поперечных сечениях стержня возникает не только внутренний изгибающий момент, но и внутренняя перерезывающая сила:



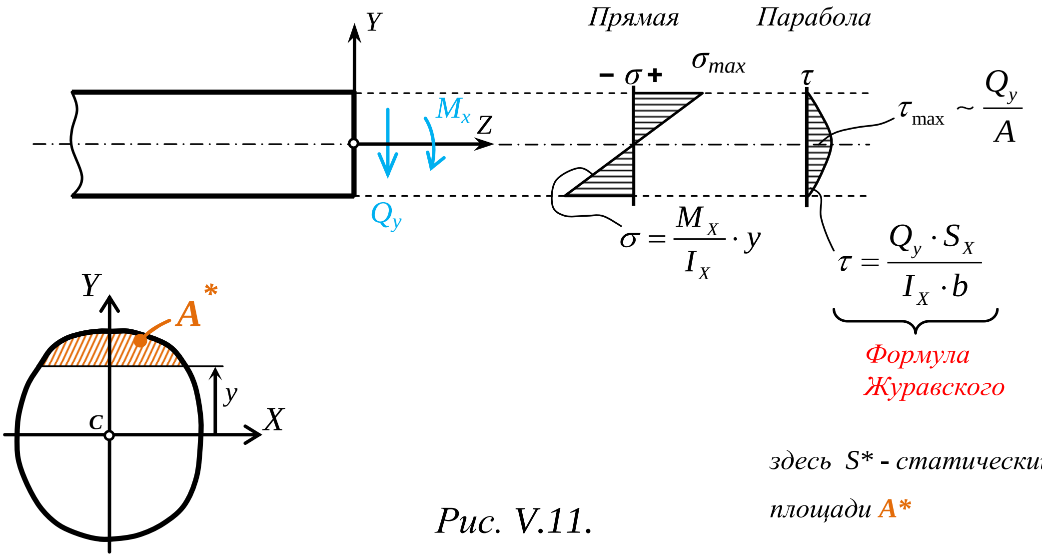
Q_y – суммарный результат действия касательных напряжений τ; M_x – результат действия нормальных напряжений σ:

$$Q_y = \int_A \tau \cdot dA$$

$$M_x = \int_A \sigma \cdot dA$$

Рис. V.10.

Распределены эти напряжения по сечению неравномерно:



$$\sigma = \frac{M_X}{I_X} \cdot y \qquad \underbrace{\tau = \frac{Q_y \cdot S_X}{I_X \cdot b}}_{\text{Формула Журавского}} \qquad (V.8)$$

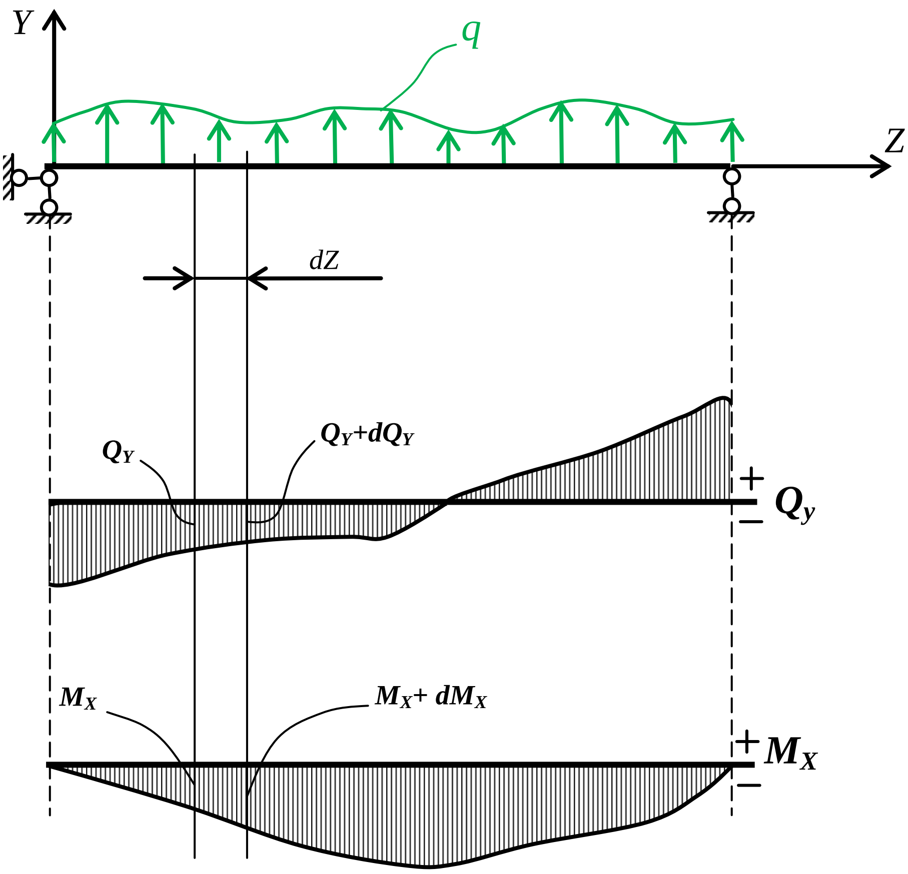
здесь S - статический момент площади* ***A****

Рис. V.11.

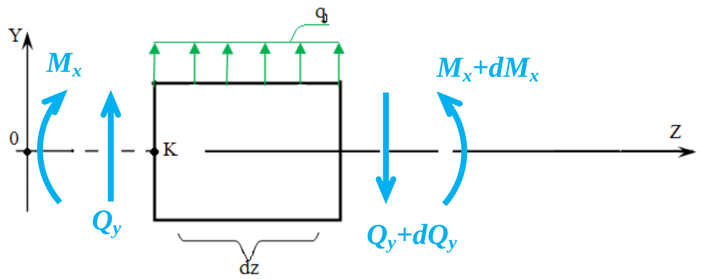
В длинных стержнях $\tau_{\max} << \sigma_{\max}$, кроме того, максимума касательные напряжения достигают у нейтрального слоя, а нормальные – по краям поперечного сечения (*рис. V.11.*) и их воздействия не суммируются.

Поэтому при расчёте перемещений точек стержня и запасов прочности действием касательных напряжений τ пренебрегают. Расчёт ведут точно так же, как и для чистого изгиба.

Связь внешней нагрузки и внутренних силовых факторов:



Уравнения равновесия кусочка стержня:



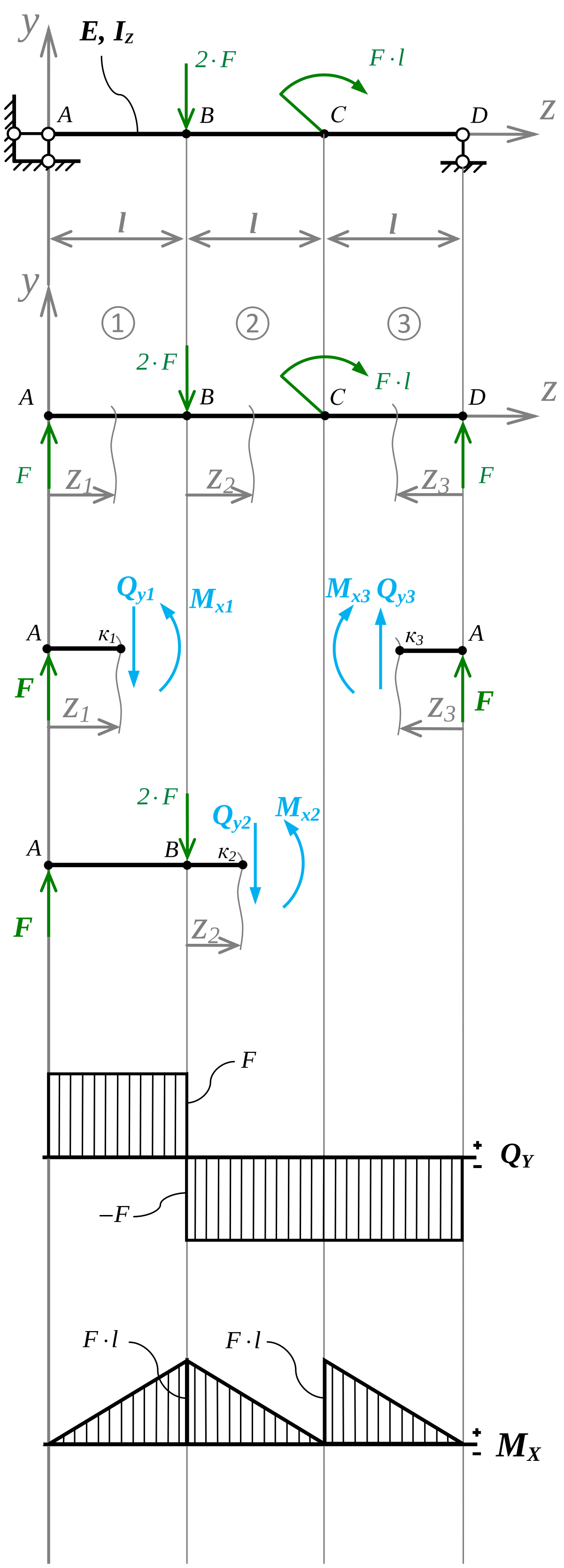
$$\sum F_y = 0 = \cancel{Q_y} + q \cdot dz - \cancel{Q_y} - dQ_y$$

$$\boxed{\frac{dQ_y}{dz} = q} \qquad (V.9)$$

$$\sum M_k = 0 = \underbrace{q \cdot dz \cdot \frac{dz}{2}}_{\approx 0} - Q_y \cdot dz - \underbrace{dQ_y \cdot dz}_{\approx 0} + \cancel{M_x} + dM_x - \cancel{M_x}$$

$$\boxed{\frac{dM_x}{dz} = Q_y} \qquad (V.10)$$

Пример $\boxed{V.3}$:



Реакции опор:

$$\sum F_Z = 0 = -Z_A \quad \Rightarrow \quad Z_A = 0$$

$$\sum M_A = 0 = -\overbrace{2\cdot F\cdot l}^{B} - \overset{C}{F\cdot l} + \overbrace{Y_D\cdot 3\cdot l}^{D}$$

$$Y_D = F$$

$$\sum M_D = 0 = -\overbrace{Y_A\cdot 3\cdot l}^{A} + \overbrace{2\cdot F\cdot 2\cdot l}^{B} - \overset{C}{F\cdot l}$$

$$Y_A = F$$

Проверка:

$$\sum F_y = \overset{A}{F} - \overset{B}{2\cdot F} + \overset{D}{F} = 0$$

РОЗУ:

$$\sum F_{y_1} = 0 = F - Q_{y_1} \quad \Rightarrow \quad Q_{y_1} = F$$

$$\sum M_{K_1} = 0 = -F\cdot z_1 + M_{x_1}$$

$$M_{x_1} = F\cdot z_1$$

$$m.A:\ z_1 = 0:\ M_{x_1} = 0$$

$$m.B:\ z_1 = l:\ M_{x_1} = F\cdot l$$

$$\sum F_{y_2} = 0 = F - 2\cdot F - Q_{y_2} \Rightarrow Q_{y_2} = -F$$

$$\sum M_{K_2} = 0 = -F\cdot(l + z_2) + 2\cdot F\cdot z_2 + M_{x_2}$$

$$M_{x_2} = F\cdot(l - z_2)$$

$$m.B:\ z_2 = 0:\ M_{x_2} = F\cdot l$$

$$m.C:\ z_2 = l:\ M_{x_2} = 0$$

$$\sum F_{y_3} = 0 = Q_{y_3} + F \quad \Rightarrow \quad Q_{y_3} = -F$$

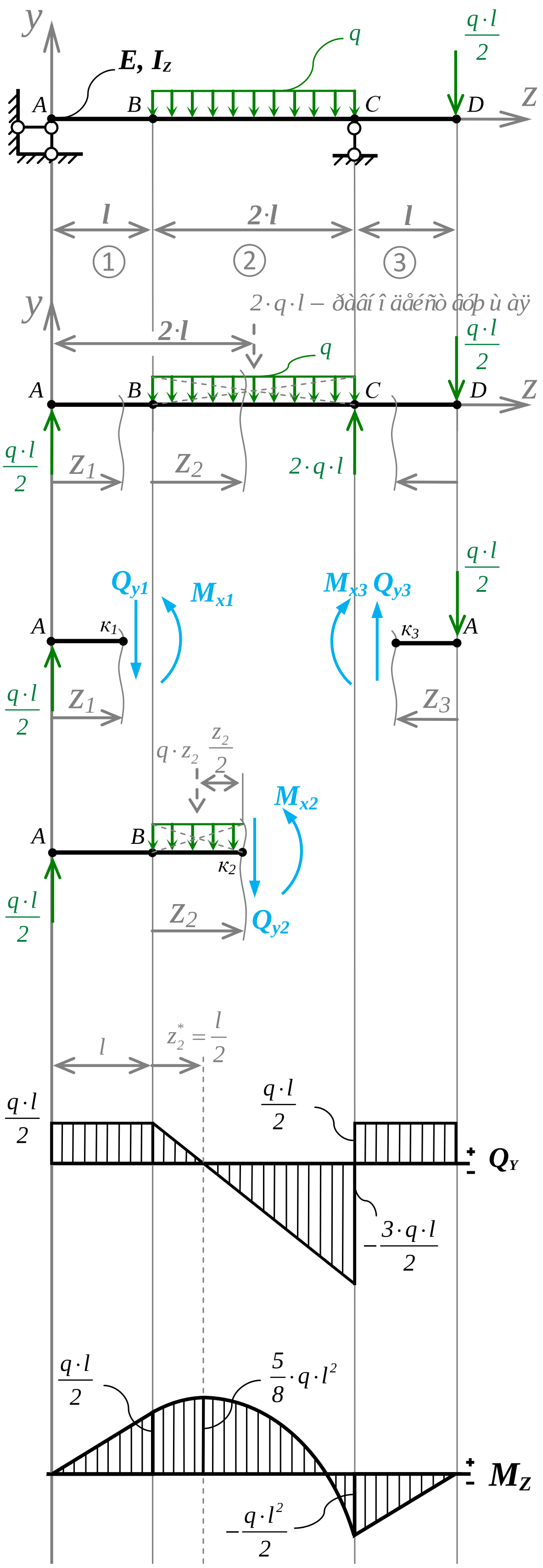
$$\sum M_{K_3} = 0 = -M_{x_3} + F\cdot z_3$$

$$M_{x_3} = F\cdot z_3$$

$$m.D:\ z_3 = 0:\ M_{x_3} = 0$$

$$m.C:\ z_3 = l:\ M_{x_3} = F\cdot l$$

Пример $\boxed{V.4}$:



Реакции опор:

$$\sum F_Z = 0 = -Z_A \quad \Rightarrow \quad Z_A = 0$$

$$\sum M_A = 0 = -\overbrace{2ql\cdot 2l}^{BC} + \overbrace{Y_C\cdot 3\cdot l}^{C} - \overbrace{\frac{q\cdot l}{2}\cdot 4\cdot l}^{D}$$

$$Y_C = 2\cdot q\cdot l$$

$$\sum M_C = 0 = -\overbrace{Y_A\cdot 3\cdot l}^{A} + \overset{BC}{2ql\cdot l} - \overset{D}{\frac{q\cdot l}{2}\cdot l}$$

$$Y_A = \frac{q\cdot l}{2}$$

Проверка:

$$\sum F_y = \overset{A}{\frac{q\cdot l}{2}} - \overset{BC}{2\cdot q\cdot l} + \overset{C}{2\cdot q\cdot l} - \overset{D}{\frac{q\cdot l}{2}} = 0$$

РОЗУ:

$$\sum F_{y_1} = 0 = \frac{q\cdot l}{2} - Q_{y_1} \quad \Rightarrow \quad Q_{y_1} = \frac{q\cdot l}{2}$$

$$\sum M_{K_1} = 0 = -\frac{q\cdot l}{2}\cdot z_1 + M_{x_1}$$

$$M_{x_1} = \frac{q\cdot l}{2}\cdot z_1$$

$$т.A:\ z_1 = 0:\ M_{x_1} = 0$$

$$т.B:\ z_1 = l:\ M_{x_1} = \frac{q\cdot l^2}{2}$$

$$\sum F_{y_2} = 0 = \frac{q\cdot l}{2} - q\cdot z_2 - Q_{y_2}$$

$$Q_{y_2} = \frac{q}{2}\cdot\left(l - 2\cdot z_2\right)$$

$$т.B:\ z_2 = 0:\ Q_{y_2} = \frac{q\cdot l}{2}$$

$$т.C:\ z_2 = 2\cdot l:\ Q_{y_2} = -\frac{3\cdot q\cdot l}{2}$$

$$\sum M_{K_2} = 0 = -\frac{q\cdot l}{2}\cdot\left(l + z_2\right) + q\cdot z_2\cdot\frac{z_2}{2} + M_{x_2}$$

$$M_{x_2} = \frac{q}{2}\cdot\left(l^2 + l\cdot z_2 - z_2^2\right)$$

$$т.B:\ z_2 = 0:\ M_{x_2} = \frac{q\cdot l^2}{2}$$

$$т.C:\ z_2 = 2\cdot l:\ M_{x_2} = -\frac{q\cdot l^2}{2}$$

$$\sum F_{y_3} = 0 = Q_{y_3} - \frac{q \cdot l}{2} \quad \Rightarrow \quad Q_{y_3} = \frac{q \cdot l}{2}$$

$$\sum M_{K_3} = 0 = -M_{x_3} - \frac{q \cdot l}{2} \cdot z_3 \quad \Rightarrow \quad M_{x_3} = -\frac{q \cdot l}{2} \cdot z_3 \quad \begin{cases} m.D:\ z_3 = 0:\ M_{x_3} = 0 \\ m.C:\ z_3 = l:\ M_{x_3} = -\dfrac{q \cdot l^2}{2} \end{cases}$$

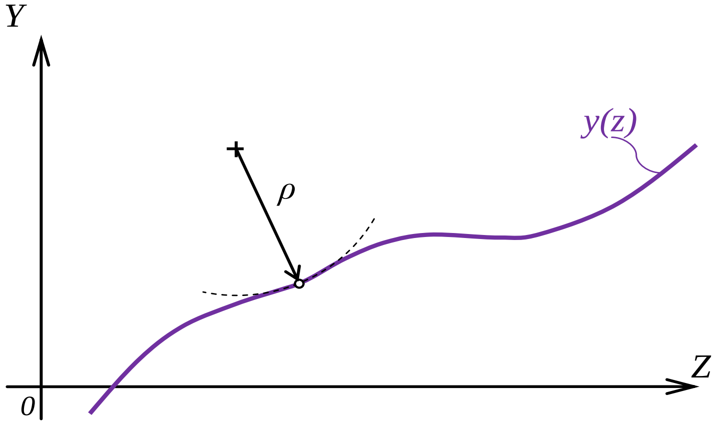
Экстремум параболы:

$$Q_{y_2}\left(z_2^*\right) = 0 = \frac{q}{2} \cdot \left(l - 2 \cdot z_2^*\right) \quad \Rightarrow \quad z_2^* = \frac{l}{2}$$

$$M_{x_2}\left(z_2^*\right) = M_{x_2}\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{q}{2} \cdot \left(l^2 + l \cdot \frac{l}{2} - \frac{l^2}{4}\right) = \frac{5}{8} \cdot q \cdot l^2$$

Дифференциальное уравнение оси изогнутого стержня

Из математики известна формула для вычисления кривизны æ произвольной функции $y(z)$:



$$æ=\frac{1}{\rho}=\frac{y''}{\left[1+\left(y'\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} \qquad (V.11)$$

Рис. V.12.

Упругая ось изогнутого под внешней нагрузкой стержня также представляет собой функцию $y(z)$, кривизна которой, как уже было установлено ранее *(V.4)* определяется внутренним изгибающим моментом M_x:

$$æ=\frac{1}{\rho}=\frac{M_x}{E\cdot I_x}$$

Таким образом, дифференциальное уравнение упругой оси стержня в общем случае нагружения:

$$\frac{y''}{\left[1+\left(y'\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}=\frac{M_x}{E\cdot I_x} \qquad (V.12)$$

В линейных задачах, которыми занимается курс «Сопротивление материалов», прогибы по определению невелики и тангенс угла наклона оси y' немногим больше нуля.

$$y' \approx 0 \quad \Rightarrow \quad \left(y'\right)^2 \to 0 \quad \Rightarrow \quad \left[1+\left(y'\right)^2\right]^{\frac{3}{2}} \to 1$$

$$\boxed{y'' \approx \frac{M_x}{E \cdot I_x}} \qquad (V.13)$$

(V.13) – ***приближённое дифференциальное уравнение упругой оси стержня***.

Если по длине стержня известны $M_x(z)$, $E(z)$ и $I_x(z)$, то интегрируя дважды уравнения *(V.13)*, можно получить, как функцию прогибов

$$v = y(z)$$

так и функцию углов поворота

$$\theta \approx y'(z)$$

(предполагается, что тангенс малого угла приближённо равен самому углу).

Такой метод вычислений прогибов и углов поворота точек упругой оси стержня называется ***методом Коши-Крылова***.

Метод Коши-Крылова имеет несколько вариантов реализации. Для примера разберём простейший из них, применимый только к прямым стержням постоянного поперечного сечения. Правила расчёта:

1) Распределённая нагрузка продолжается до конца стержня. Там, где её не было, вводится компенсирующая распределённая нагрузка;

2) Уравнение момента M_x составляется в глобальной системе координат $OXYZ$ для текущего сечения последнего от начала координат участка балки;

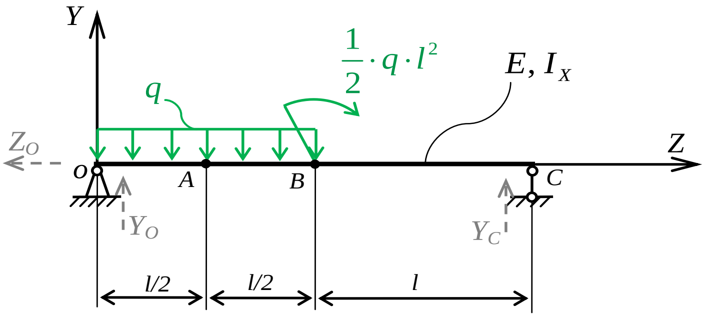
3) Сосредоточенный внешний момент умножается на скобку в нулевой степени, внутри которой стоит разность глобальной координаты z и координаты точки приложения момента;

4) Интегрировать, не раскрывая скобок;

5) При определении прогиба сечения используются только те слагаемые, внутри скобок которых образуется положительное число.

В результате интегрирования *ДУ* мы получаем две произвольные постоянные C и D – угол поворота и прогиб в начале координат, умноженные на изгибную жёсткость $E \cdot I_x$. Эти постоянные определяются из граничных условий (*ГУ*) на опорах.

Пример $\boxed{V.5}$:



$y_A = ?$ $\quad\theta_A = ?$

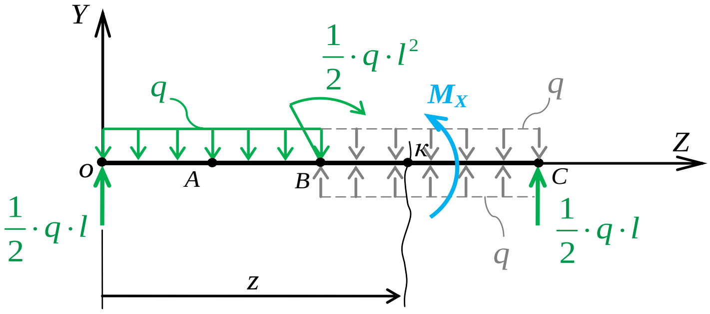
$y_B = ?$ $\quad\theta_B = ?$

Уравнения равновесия стержня:

$$\sum F_z = 0 \Rightarrow Z_0 = 0$$

$$\sum M_0 = 0 \Rightarrow Y_C = \frac{1}{2}\cdot q\cdot \ell$$

$$\sum M_C = 0 \Rightarrow Y_0 = \frac{1}{2}\cdot q\cdot \ell$$



<u>ДУ изогнутой оси:</u>

$$E\cdot I_x\cdot y'' = M_x(z) = \underbrace{-\frac{q\cdot z^2}{2}}_{q\ верхнее} + \underbrace{\frac{q\cdot(z-\ell)^2}{2}}_{q\ нижнее} + \underbrace{\frac{1}{2}\cdot q\cdot\ell\cdot z}_{т.O} + \underbrace{\frac{1}{2}\cdot q\cdot\ell^2\cdot(z-\ell)^0}_{т.B}$$

$$E\cdot I_x\cdot y' = -\frac{q\cdot z^3}{6} + \frac{q\cdot(z-\ell)^3}{6} + \frac{q\cdot\ell\cdot z^2}{4} + \frac{q\cdot\ell^2\cdot(z-\ell)}{2} + \tilde{N}$$

$$E\cdot I_x\cdot y = -\frac{q\cdot z^4}{24} + \frac{q\cdot(z-\ell)^4}{24} + \frac{q\cdot\ell\cdot z^3}{12} + \frac{q\cdot\ell^2\cdot(z-\ell)^2}{4} + \tilde{N}\cdot z + D$$

<u>ГУ:</u>

1) $z=0,\ y=0:\ 0 = -\cancel{\frac{q\cdot 0^4}{24}} + \frac{q\cdot(\cancel{0-\ell})^4}{24} + \cancel{\frac{q\cdot\ell\cdot 0^3}{12}} + \frac{q\cdot\ell^2\cdot(\cancel{0-\ell})^2}{4} + C\cdot 0 + D$

$$D = 0$$

2) $z = 2\cdot\ell,\ y=0:\ 0 = -\frac{q\cdot(2\cdot\ell)^4}{24} + \frac{q\cdot(2\cdot\ell-\ell)^4}{24} + \frac{q\cdot\ell\cdot(2\cdot\ell)^3}{12} +$

$$+\frac{q\cdot\ell^2\cdot(2\cdot\ell-\ell)^2}{4} + C\cdot 2\cdot\ell + D$$

$$C = -\frac{7}{48}\cdot q\cdot\ell^3$$

Окончательные формулы:

$$y=\frac{q}{48\cdot E\cdot I_x}\cdot\left[-2\cdot z^4+2\cdot(z-\ell)^4+4\cdot\ell\cdot z^3+12\cdot\ell^2\cdot(z-\ell)^2-7\cdot\ell^3\cdot z\right]$$

$$y'=\frac{q}{48\cdot E\cdot I_x}\cdot\left[-8\cdot z^3+8\cdot(z-\ell)^3+12\cdot\ell\cdot z^2+24\cdot\ell^2\cdot(z-\ell)-7\cdot\ell^3\right]$$

Прогиб и угол поворота упругой оси в т. *A*:

$$y_A=y\left(z=\frac{\ell}{2}\right)=$$

$$=\frac{q}{48\cdot E\cdot I_x}\cdot\left[-2\cdot\left(\frac{\ell}{2}\right)^4+2\cdot\overbrace{\left(\frac{\ell}{2}-\ell\right)^4}^{(<0)}+4\cdot\ell\cdot\left(\frac{\ell}{2}\right)^3+12\cdot\ell^2\cdot\overbrace{\left(\frac{\ell}{2}-\ell\right)}^{(<0)}-7\cdot\ell^3\cdot\frac{\ell}{2}\right]=$$

$$=-\frac{25\cdot q\cdot\ell^4}{384\cdot E\cdot I_x}\quad,[м]$$

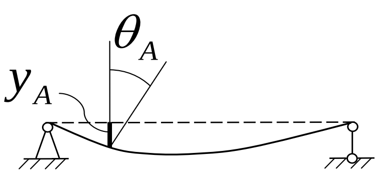
$y_A<0\ \Rightarrow$ перемещение вниз;

$$\theta_A=y'\left(z=\frac{\ell}{2}\right)=$$

$$=\frac{q}{48\cdot E\cdot I_x}\cdot\left[-8\cdot\left(\frac{\ell}{2}\right)^3+8\cdot\overbrace{\left(\frac{\ell}{2}-\ell\right)^3}^{(<0)}+12\cdot\ell\cdot\left(\frac{\ell}{2}\right)^2+24\cdot\ell^2\cdot\overbrace{\left(\frac{\ell}{2}-\ell\right)}^{(<0)}-7\cdot\ell^3\right]=$$

$$=-\frac{5\cdot q\cdot\ell^3}{48\cdot E\cdot I_x},\quad[рад]$$

ΘA < 0 — поворот по часовой стрелке;



Прогиб и угол поворота упругой оси стержня в т. *B*:

$$y_B = y\left(z=\ell\right) =$$

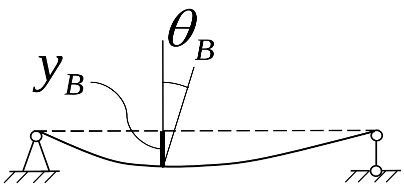
$$= \frac{q}{48\cdot E\cdot I_x}\cdot\left[-2\cdot\ell^4 + 2\cdot\cancel{\left(\ell-\ell\right)}^4 + 4\cdot\ell\cdot\ell^3 + 12\cdot\ell^2\cdot\cancel{\left(\ell-\ell\right)} - 7\cdot\ell^3\cdot\ell\right] =$$

$$= -\frac{5\cdot q\cdot\ell^4}{48\cdot E\cdot I_x}\quad,\quad [м]$$

$$\theta_B \approx y'\left(z=\ell\right) =$$

$$= \frac{q}{48\cdot E\cdot I_x}\cdot\left[-8\cdot\ell^3 + 8\cdot\cancel{\left(\ell-\ell\right)}^3 + 12\cdot\ell\cdot\ell^2 + 24\cdot\ell^2\cdot\cancel{\left(\ell-\ell\right)} - 7\cdot\ell^3\right] =$$

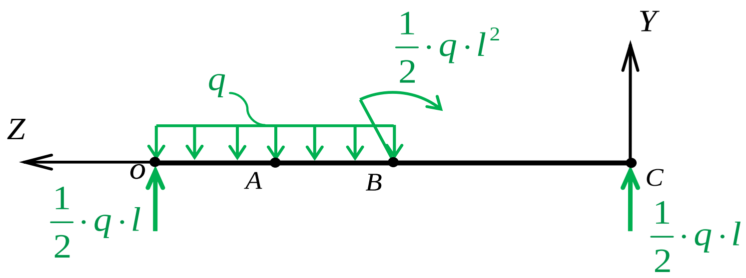
$$= -\frac{3\cdot q\cdot\ell^3}{48\cdot E\cdot I_x} = -\frac{q\cdot\ell^3}{16\cdot E\cdot I_x},\quad [рад]$$



П р и м е ч а н и е :

Распределённая нагрузка продолжается до конца стержня. При этом неважно, где она начинается.

Если бы в разобранном примере система координат начиналась на другом конце стержня,



то продлевать распределённую нагрузку и вводить компенсирующую не требовалось бы вовсе.

Следует, однако, помнить: при таком развороте системы координат, вычисленные углы θ меняют знак.

Косой изгиб

Косым называют вид изгиба, при котором направление вектора внутреннего изгибающего момента не совпадает ни с одной из главных центральных осей поперечного сечения:

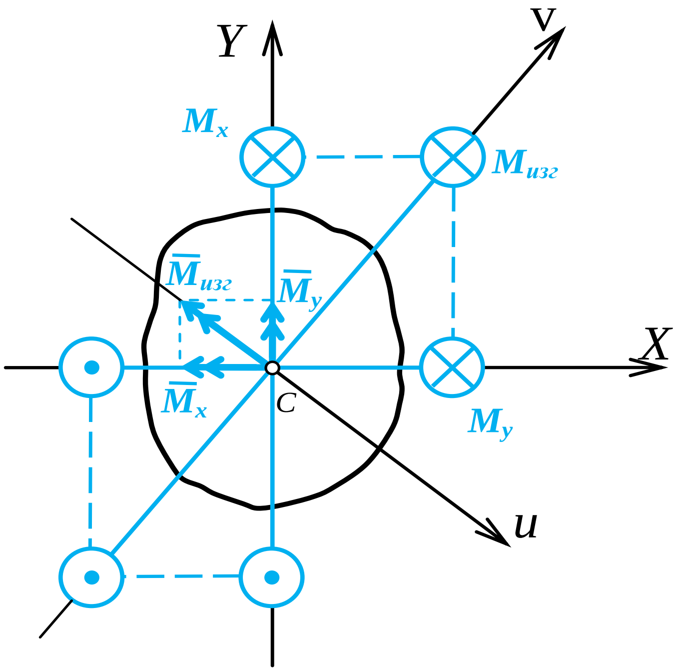


Рис. V.13.

Расчёт ведётся путём рассмотрения косого изгиба, как суммы двух прямых: вектор изгибающего момента раскладывается по главным центральным осям

$$\bar{M}_{изг} = \bar{M}_x + \bar{M}_y \qquad (V.14)$$

Как решается задача прямого изгиба, мы уже знаем.

Напряжение σ в любой точке поперечного сечения с координатами (x, y) в главных центральных осях, рассматривают, как сумму напряжений от действия моментов M_x и M_y:

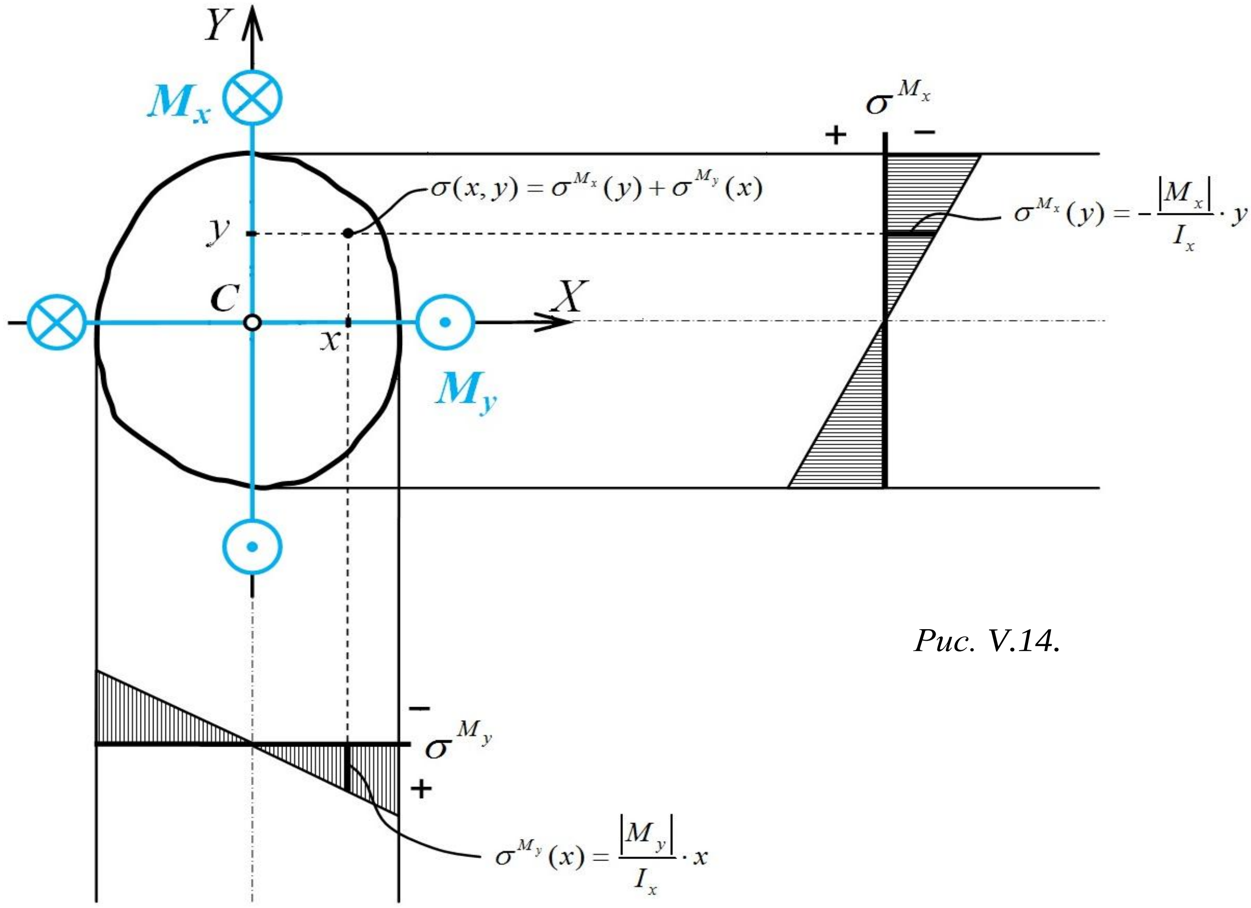


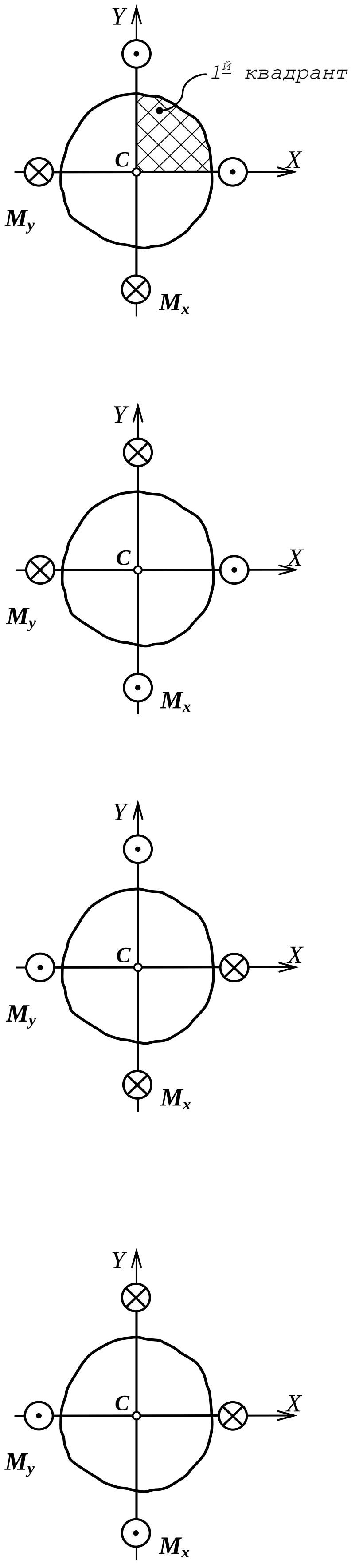
Рис. V.14.

$$\sigma = \sigma^{M_x} + \sigma^{M_y}$$

или, вспоминая формулу *(V.5)*:

$$\boxed{\sigma = \pm \frac{|M_x|}{I_x} \cdot y \pm \frac{|M_y|}{I_y} \cdot x} \qquad (V.15)$$

здесь знаки слагаемых соответствуют знакам напряжений, порождаемых соответствующими моментами M_x или M_y в первом квадранте главных центральных осей:



$$\sigma = +\frac{|M_x|}{I_x}\cdot y + \frac{|M_y|}{I_y}\cdot x$$

$$\sigma = -\frac{|M_x|}{I_x}\cdot y + \frac{|M_y|}{I_y}\cdot x$$

$$\sigma = +\frac{|M_x|}{I_x}\cdot y - \frac{|M_y|}{I_y}\cdot x$$

$$\sigma = -\frac{|M_x|}{I_x}\cdot y - \frac{|M_y|}{I_y}\cdot x$$

Рис. V.15.

Нейтральный слой при косом изгибе остается плоским. На поперечном сечении он виден отрезком – частью прямой, именуемой **нейтральная линия (н.л.)**, (*рис. V.16.*).

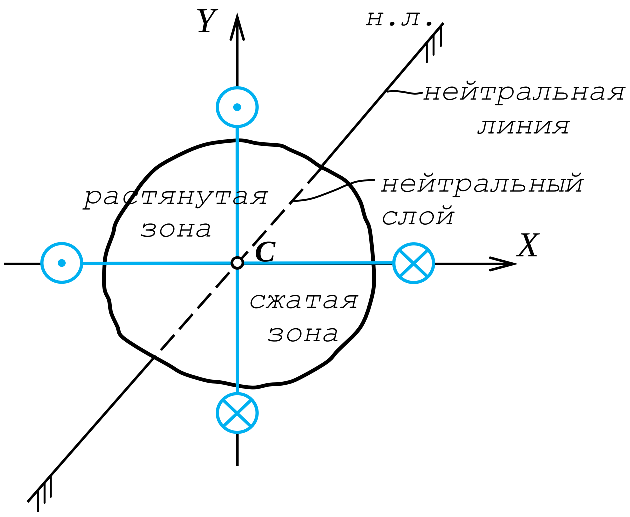


Рис. V.16.

Нейтральная линия разделяет сжатую зону поперечного сечения и растянутую (всегда отделяет кресты от точек, *рис. V.16.*), её уравнение в координатах CXY находят из того условия, что напряжения в нейтральном слое равны нулю:

$$\boxed{\sigma = 0 = \pm \frac{|M_x|}{I_x} \cdot y \pm \frac{|M_y|}{I_y} \cdot x} \qquad (V.16)$$

При косом изгибе нейтральная линия всегда проходит через точку C – центр тяжести поперечного сечения. Напряжения при косом изгибе распределяются по сечению линейно, принимая экстремальные значения в точках, наиболее удаленных от нейтральной линии (*рис. V.17*).

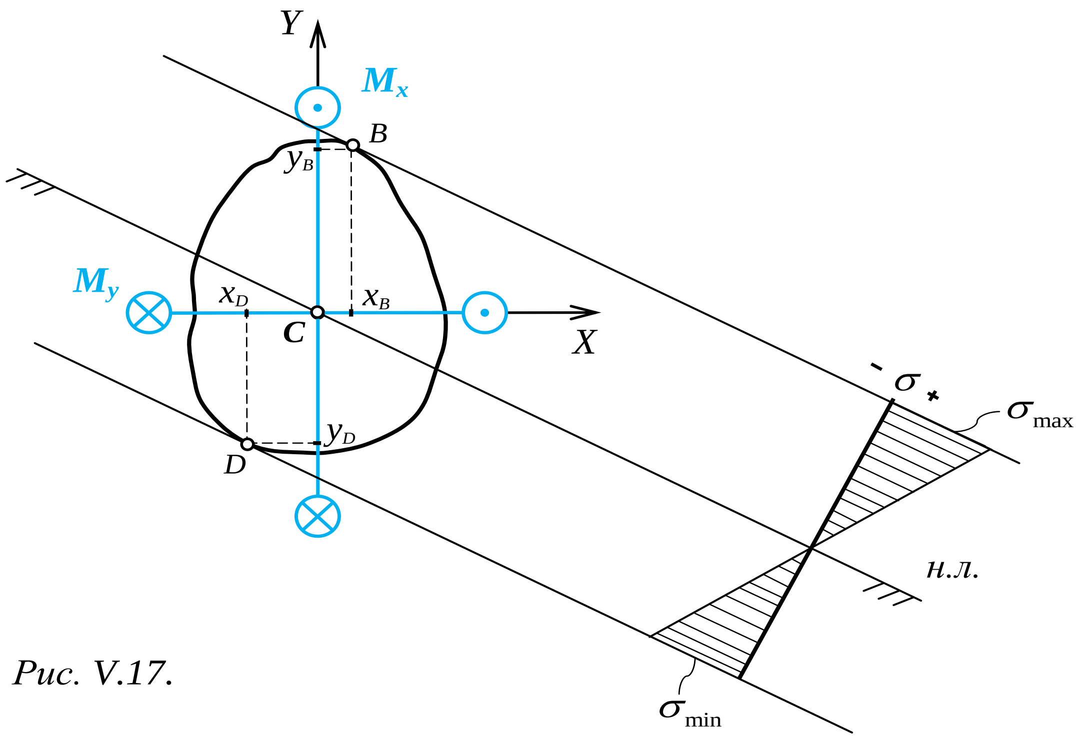


Рис. V.17.

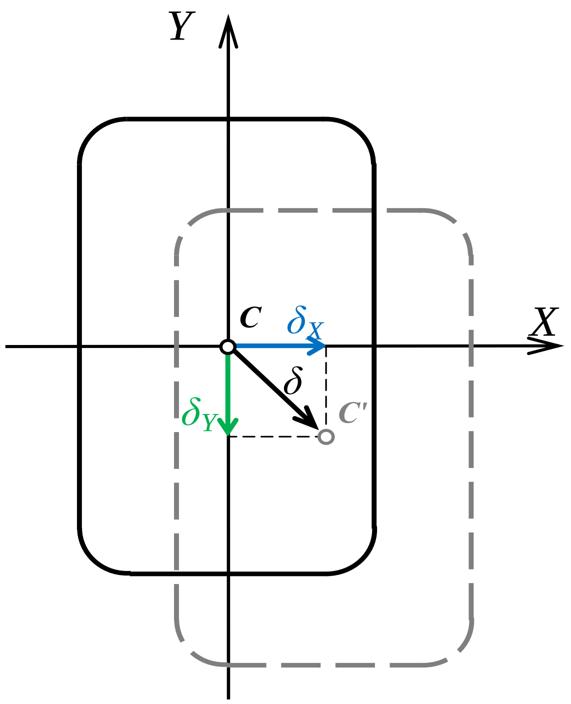
Для изгиба, показанного на *рис. V.17*, экстремальные напряжения:

$$\sigma_{\max} = \sigma_B = +\frac{|M_x|}{I_x} \cdot y_B + \frac{|M_y|}{I_y} \cdot x_B \ ;$$

$$\sigma_{\min} = \sigma_D = +\frac{|M_x|}{I_x} \cdot y_D + \frac{|M_y|}{I_y} \cdot x_D \ .$$

Значения внутренних изгибающих моментов M_x и M_y берутся по модулю, координаты точек x_B, y_B, x_D, y_D — с учётом знака.

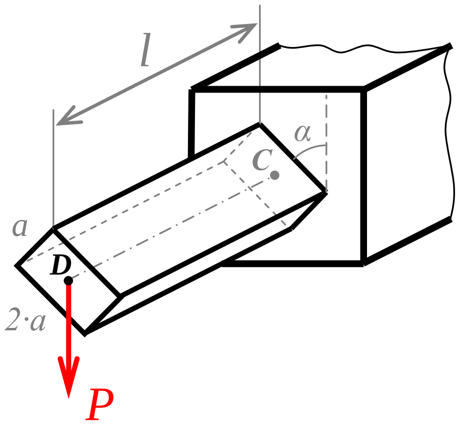
Полное перемещение поперечного сечения стержня при косом изгибе δ находят, как геометрическую сумму перемещений δ_x и δ_y от каждого из двух прямых изгибов:



$$\delta = \sqrt{\delta_x^2 + \delta_y^2} \qquad (V.17)$$

Рис. V.18.

Пример $\boxed{V.6}$:

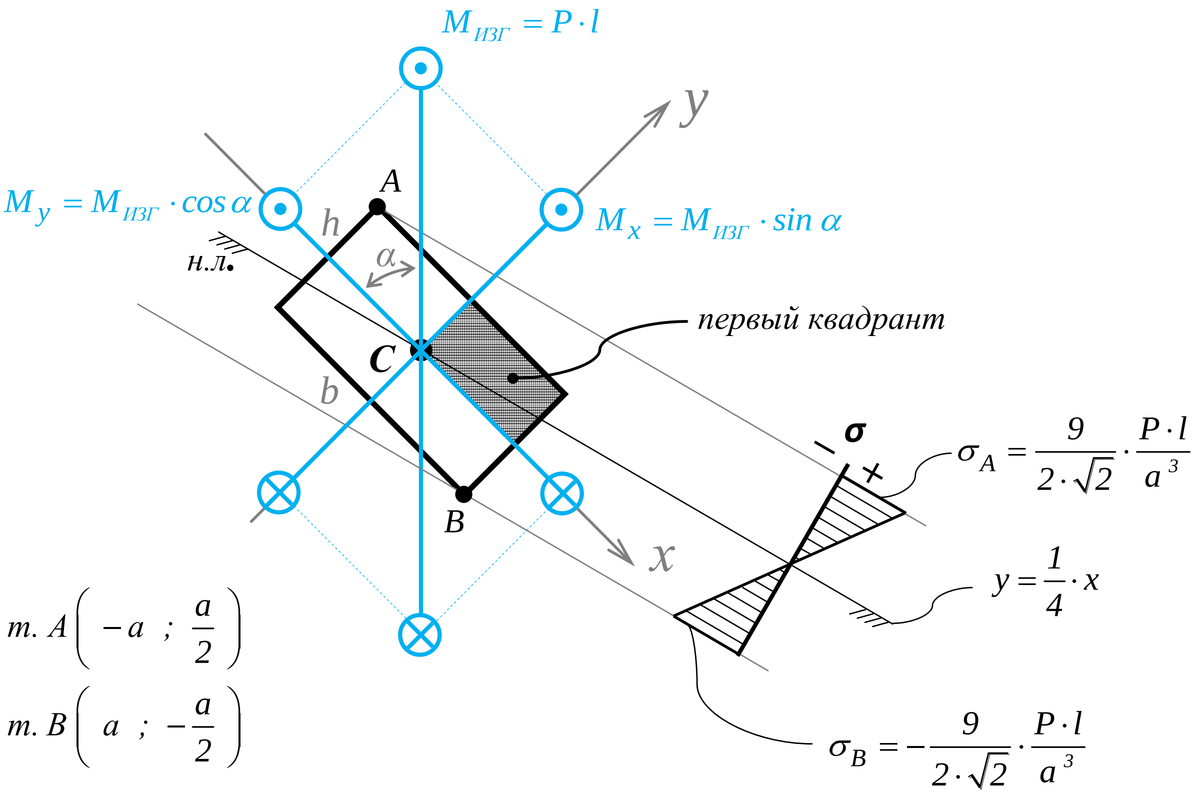


Консольный брус прямоугольного поперечного сечения $a \times 2a$ длиной l повёрнут на угол $\alpha = 45°$ и нагружен на конце вертикальной силой P.

Построить эпюру нормальных напряжений σ в корневом сечении бруса; найти перемещение δ точки приложения силы.

Решение

Сила P создаёт в корневом поперечном сечении бруса наибольший внутренний изгибающий момент $M_{изг} = P \cdot l$ (сжаты нижние волокна):



Определяемся с центром тяжести C поперечного сечения бруса (он находится на пересечении осей симметрии) и с его главными центральными осями x и y (совпадают с осями симметрии). Все последующие вычисления проводятся в системе координат Cxy.

Уравнение нейтральной линии:

M_x растягивает волокна в первом квадранте

$$0 = \pm\frac{|M_x|}{I_x}\cdot y \pm \frac{|M_y|}{I_y}\cdot x$$

M_y сжимает волокна в первом квадранте

$$M_x = M_{изг}\cdot \sin\alpha = \frac{P\cdot l}{\sqrt{2}}$$

$$M_y = M_{изг}\cdot \cos\alpha = \frac{P\cdot l}{\sqrt{2}}$$

$$I_x = \frac{b\cdot h^3}{12} = \frac{(2\cdot a)\cdot a^3}{12} = \frac{1}{6}\cdot a^4$$

$$I_y = \frac{b^3\cdot h}{12} = \frac{(2\cdot a)^3\cdot a}{12} = \frac{4}{6}\cdot a^4$$

$$0 = +\frac{\cancel{\dfrac{P\cdot l}{\sqrt{2}}}}{\cancel{\dfrac{1}{6}\cdot a^4}}\cdot y - \frac{\cancel{\dfrac{P\cdot l}{\sqrt{2}}}}{4\cdot\cancel{\dfrac{1}{6}\cdot a^4}}\cdot x$$

$$\boxed{y = \frac{1}{4}\cdot x}$$ — уравнение нейтральной линии в координатах *Cxy*.

Проводим на чертеже корневого сечения нейтральную линию, подписываем её «н.л.», концы подштриховываем.

На нейтральной линии нормальные напряжения σ равны нулю. По мере удаления от нейтральной линии они возрастают линейно. Наиболее удалёнными от нейтральной линии являются точки *A* и *B* поперечного сечения, следовательно, наибольшие по модулю напряжения возникнут именно в этих точках:

$$\sigma(x,y)=+\frac{|M_x|}{I_x}\cdot y-\frac{|M_y|}{I_y}\cdot x=\frac{\dfrac{P\cdot l}{\sqrt{2}}}{\dfrac{a^4}{6}}\cdot y-\frac{\dfrac{P\cdot l}{\sqrt{2}}}{\dfrac{4\cdot a^4}{6}}\cdot x=\frac{3\cdot P\cdot l}{2\cdot\sqrt{2}\cdot a^4}\cdot[4\cdot y-x]$$

$т.\ A\left(-a\ ;\ \dfrac{a}{2}\right)$

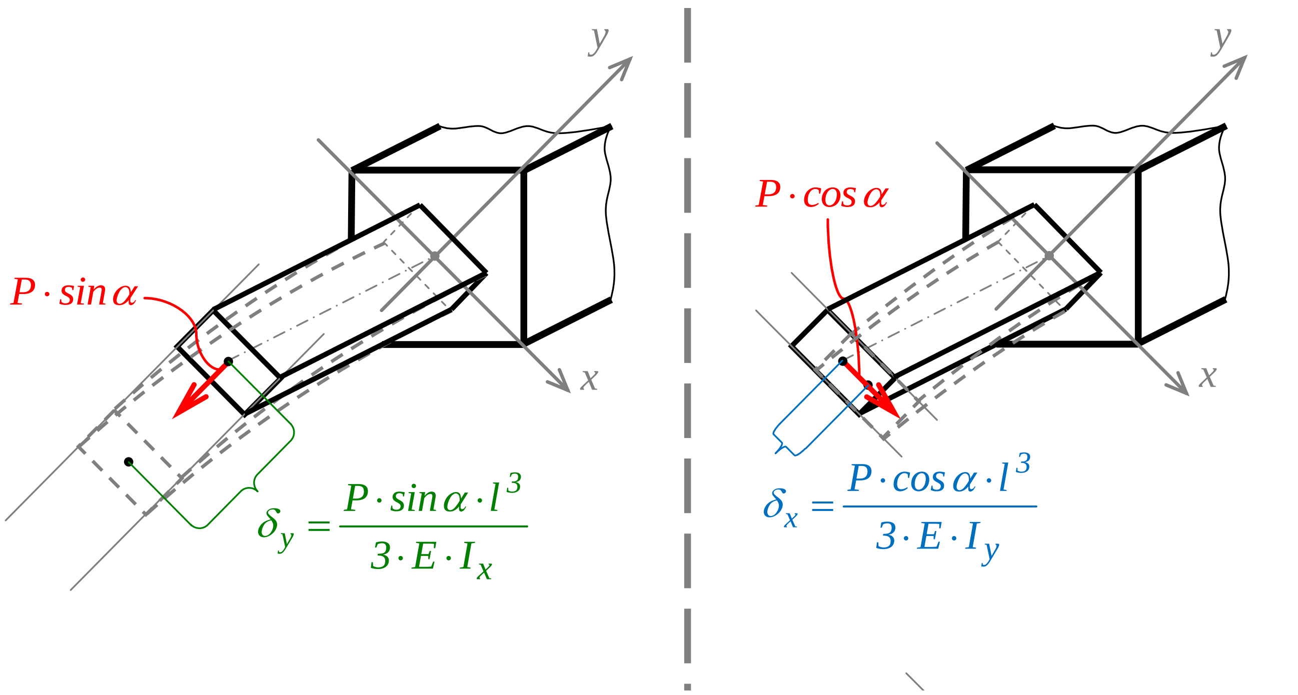
$$\sigma_A=\sigma\left(-a\,,\ \frac{a}{2}\right)=\frac{3\cdot P\cdot l}{2\cdot\sqrt{2}\cdot a^4}\cdot\left[4\cdot\frac{a}{2}-(-a)\right]=\frac{9\cdot P\cdot l}{2\cdot\sqrt{2}\cdot a^3}$$

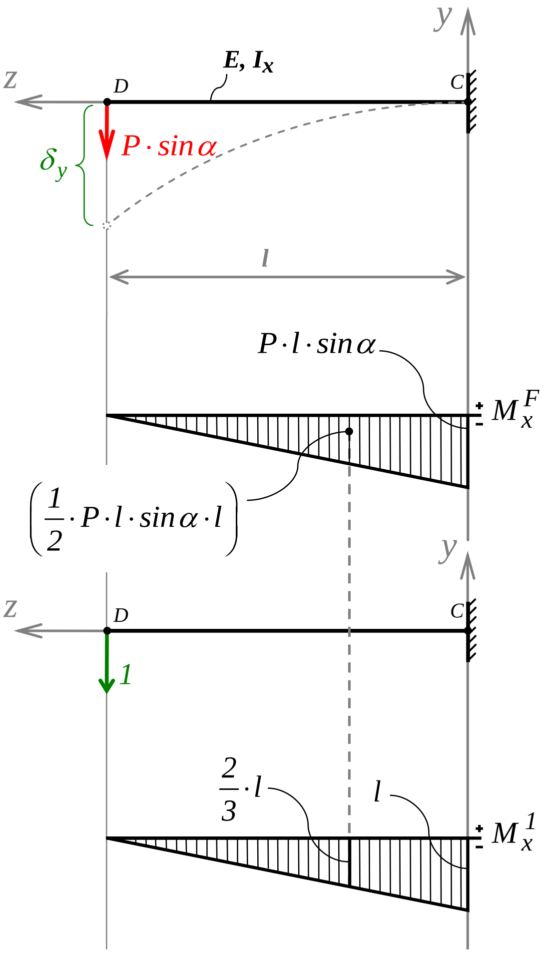
$т.\ B\left(a\ ;\ -\dfrac{a}{2}\right)$

$$\sigma_B=\sigma\left(a\,,\ -\frac{a}{2}\right)=\frac{3\cdot P\cdot l}{2\cdot\sqrt{2}\cdot a^4}\cdot\left[4\cdot\left(-\frac{a}{2}\right)-a\right]=-\frac{9\cdot P\cdot l}{2\cdot\sqrt{2}\cdot a^3}$$

На чертеже корневого сечения строим эпюру σ - прямую линию между крайними значениями σ_A и σ_B.

Перемещения точки D приложения силы рассчитываются по отдельности для каждого из двух прямых изгибов и потом геометрически складываются:

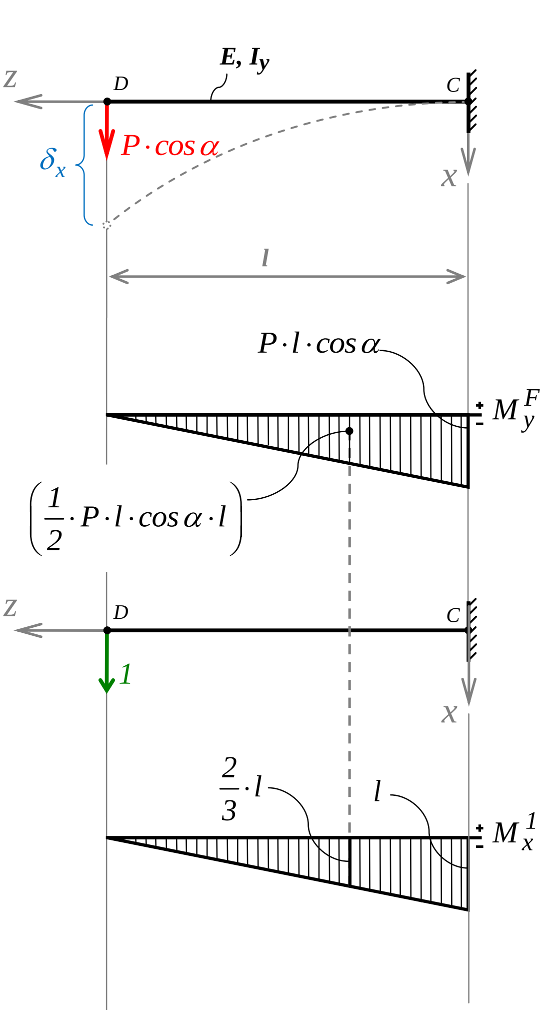




$$\delta_y = \frac{M_x^F \cdot M_x^1}{E \cdot I_x} =$$

$$= \frac{1}{E \cdot I_x} \cdot \left[\left(\frac{1}{2} \cdot P \cdot l \cdot \sin\alpha \cdot l \right) \cdot \frac{2}{3} \cdot l \right] =$$

$$= \frac{P \cdot l^3}{3 \cdot E \cdot I_x} \cdot \sin\alpha = \frac{P \cdot l^3}{3 \cdot \sqrt{2} \cdot E \cdot I_x}$$



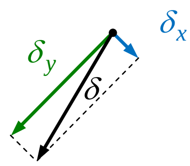
$$\delta_x = \frac{M_y^F \cdot M_y^1}{E \cdot I_y} =$$

$$= \frac{1}{E \cdot I_y} \cdot \left[\left(\frac{1}{2} \cdot P \cdot l \cdot \cos\alpha \cdot l \right) \cdot \frac{2}{3} \cdot l \right] =$$

$$= \frac{P \cdot l^3}{3 \cdot E \cdot I_y} \cdot \cos\alpha = \frac{P \cdot l^3}{3 \cdot \sqrt{2} \cdot E \cdot I_y}$$

δ_y - перемещение точки D под действием внутреннего изгибающего момента M_x; δ_x - перемещение точки D под действием момента M_y; суммарное перемещение точки D вычисляем геометрическим сложением:

$$\delta = \sqrt{\delta_y^2 + \delta_x^2} = \frac{P \cdot l^3 \cdot 6}{3 \cdot \sqrt{2} \cdot E \cdot a^4} \cdot \sqrt{\frac{17}{16}} = \sqrt{\frac{17}{8}} \cdot \frac{P \cdot l^3}{E \cdot a^4} \quad .$$



Внецентренное растяжение (сжатие)

Внецентренным растяжением (сжатием) называют такой вид нагружения стержня, при котором ось действующей на стержень внешней продольной силы (или результирующей системы продольных сил) не совпадает с его упругой осью:

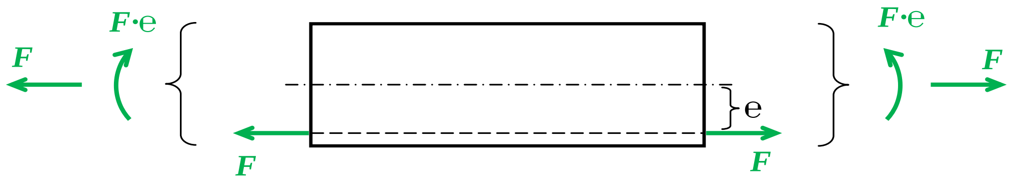


Рис. V.19.

Действие такой силы (или группы сил) на стержень эквивалентно действию на него осевой растягивающей силы и изгибающего момента (*рис.V.17.*).

А изгибающий момент можно разложить по главным центральным осям *(V.14)*, получив косой изгиб с растяжением (сжатием):

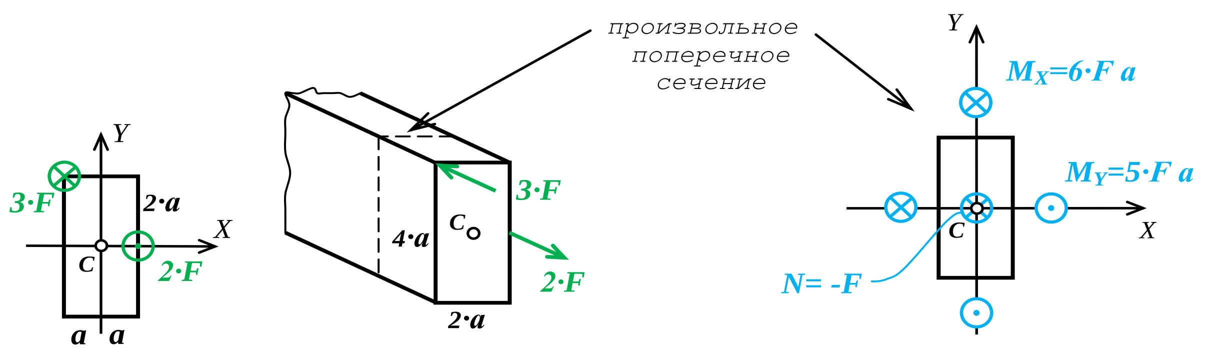


Рис. V.20.

Напряжение в точке поперечного сечения с координатами (x, y) в главных центральных осях вычисляется по формуле:

$$\boxed{\sigma = \pm\frac{|M_x|}{I_x}\cdot y \pm \frac{|M_y|}{I_y}\cdot x + \frac{N}{A}} \qquad (V.18)$$

где A – площадь поперечного сечения.

M_x и M_y подставляются по модулю, N, x и y – с учётом знака. Знаки перед первыми двумя слагаемыми определяются по тому же правилу, что и для косого изгиба.

Уравнение нейтральной линии:

$$\boxed{0 = \pm\frac{|M_x|}{I_x}y \pm \frac{|M_y|}{I_y}x + \frac{N}{A}} \qquad \text{(V.19)}$$

При внецентренном растяжении (сжатии) нейтральная линия не проходит через центр тяжести сечения:

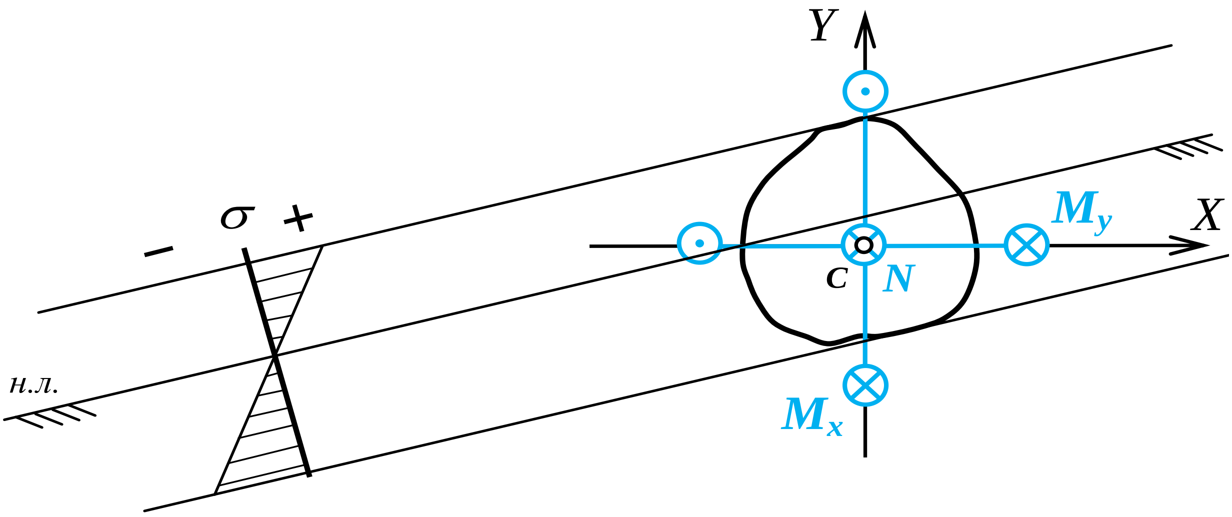


Рис. V.21.